KTH Matematik

Tentamen i 5B1817 Tillämpad ickelinjär optimering
Fredagen den 8 juni 2007 kl. 8.00–13.00

Examinator: Anders Forsgren, tel. 790 71 27.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

24 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Betrakta det kvadratiska programmeringsproblemet (QP) definierat av

$$(QP) \quad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^T H x \\ \text{då} & Ax = b, \end{array}$$

med

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad b = 2.$$

Notera att H inte är positivt semidefinit.

(a) Antag att $A = (1\ 0\ 1)$. Har (QP) i detta fall en global minpunkt? Bestäm i så fall denna. .... (5p)

(b) Antag att $A = (1\ 1\ 0)$. Har (QP) i detta fall en global minpunkt? Bestäm i så fall denna. .... (5p)

Ledning: En tillåten punkt ges i båda fallen av $x_0 = (1\ 1\ 1)^T$.

2. Betrakta NLP-problemet (P) definierat av

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & x \in I\!R^n, \end{array}$$

där f och g är två gånger kontinuerligt deriverbara.

En reguljär punkt x^* till bivillkoren är, som bekant, en punkt x^* sådan att $\nabla g_i(x^*)$, $i \in \{l : g_l(x^*) = 0\}$, är linjärt oberoende.

(a) Formulera andra ordningens nödvändiga villkor för att en reguljär punkt x^* ska vara en lokal optimalpunkt till (P). .... (4p)

(b) För det specialfall då $g(x) = Ax - b$, bevisa första ordningens nödvändiga villkor för att en reguljär punkt x^* ska vara en lokal optimalpunkt till (P). ..... (6p)

3. Betrakta det ickelinjära programmeringsproblemet (P) definierat av

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & (x_1+2)^2 + (x_2+3)^2 \\ \text{då} & 1 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 \ge 0, \\ & x_2 \ge 0. \end{array}$$

Låt $x^{(0)} = (1\ 1)^T$ och $\lambda^{(0)} = (1\ 0)^T$. (I enlighet med läroboken definierar vi lagrangefunktionen som $\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) - \lambda^T g(x)$.)

Antag att man vill lösa (P) med hjälp av sekvensiell kvadratisk programmering. Genomför en iteration utgående från de givna $x^{(0)}$ och $\lambda^{(0)}$. Det subproblem som uppstår får lösas på valfritt sätt, som inte behöver vara systematisk. Till exempel kan du gissa optimallösningen ur en figur. Optimallösningen ska dock verifieras analytiskt. Din uppgift är alltså att ta fram $x^{(1)}$ och $\lambda^{(1)}$. Linjesökning behöver inte genomföras. .... (10p)

4. Betrakta återigen det ickelinjära programmeringsproblemet (P) definierat av

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & (x_1+2)^2 + (x_2+3)^2 \\ \text{då} & 1 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 \ge 0, \\ & x_2 \ge 0, \end{array}$$

vilket är samma problem som i uppgift 3.

Låt $x^{(0)} = (0\ 1)^T$ och $\lambda^{(0)} = (2\ 1)^T$. (I enlighet med läroboken definierar vi lagrangefunktionen som $\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) - \lambda^T g(x)$.)

(a) Antag att man vill lösa (P) med hjälp av en primal-dual inrepunktsmetod. Ställ upp det linjära ekvationssystem som behöver lösas i första iterationen. Sätt barriärparametern μ till $\mu = 1$ initialt. Du ska sätta in numeriska värden i ekvationssystemet, däremot behöver du *inte* lösa det. .... (7p)

(b) Antag att du löst det linjära ekvationssystemet i (4a). Ange ur du skulle beräkna nästa iterationspunkt. .... (3p)

5. Betrakta det semidefinita programmeringsproblemet

$$(SDP) \qquad \begin{array}{ll} \min & x \\ \text{då} & \begin{pmatrix} Ix & -A^T \\ -A & Ix \end{pmatrix} \succeq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

där A är en given kvadratisk (men osymmetrisk) $n \times n$-matris och I är enhetsmatrisen av dimension n. (Observera att x är en skalär variabel.)

Matrisen A kan *singulärvärdesfaktoriseras* enligt $A = U\Sigma V^T$, där $U^TU = I$, $V^TV = I$, och $\Sigma = \text{diag}(\sigma)$, där $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$. Vi låter kolumn i i U respektive V betecknas med u_i respektive v_i, $i = 1, \ldots, n$. Det innebär alltså att vi får

$$A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^{n} u_i \sigma_i v_i^T.$$

(a) Förklara i ord vad optimallösningen till (SDP) är. .... (2p)
Ledning: Egenvärdena till matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & -A^T \\ -A & 0 \end{pmatrix}$$

ges av $\pm\sigma_i$, $i = 1, \ldots, n$.

(b) Ställ upp det duala problemet som svarar mot (SDP). .... (4p)

(c) Det duala problemet har en optimallösning som ges av en matris av rang ett, där denna matris är uppbyggd av u_1 och v_1, dvs de singulärvektorer som svarar mot största singulärvärdet σ_1. Bestäm denna optimallösning. Systematisk metod behöver inte användas. .... (4p)

Lycka till!