KTH Matematik

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem
Fredagen den 23 april 2004 kl. 14.00–19.00

Examinator: Anders Forsgren, tel. 790 71 27.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, utelämnat svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) För en given $m \times n$-matris A av rang m och en given vektor c i $\mathbb{R}^n$, betrakta minstakvadratproblemet

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & \|A^T y - c\|_2^2 \\ \text{då} & y \in \mathbb{R}^m. \end{array}$$

Antag att y^* är en lokal minpunkt till (P). Är då y^* garanterat en global minpunkt till (P)? .... (1p)

(b) För en given $m \times n$-matris A av rang m och en given vektor c i $\mathbb{R}^n$, betrakta minstakvadratproblemet

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & \|A^T y - c\|_2^2 \\ \text{då} & y \in \mathbb{R}^m. \end{array}$$

Antag att y^* är en global minpunkt till (P). Är då garanterat $A^T y^* - c = 0$? .... (1p)

(c) Antag att x^* är en lokal minpunkt till det ickelinjära programmeringsproblemet

$$(NLP) \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) \geq 0, \end{array}$$

där $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är två gånger kontinuerligt deriverbara. Gäller det då garanterat att $\nabla f(x^*) = 0$? .... (1p)

(d) Antag att x^* är en lokal minpunkt till det ickelinjära programmeringsproblemet

$$(NLP) \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & x \geq 0, \end{array}$$

där $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är två gånger kontinuerligt deriverbar. Gäller det då garanterat att $\nabla f(x^*) \geq 0$? .... (1p)

(e) Antag att x^* är en lokal minpunkt till det ickelinjära programmeringsproblemet

$$(NLP) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) \geq 0, \end{array}$$

där $f : I\!R^n \to I\!R$ och $g : I\!R^n \to I\!R^m$ är två gånger kontinuerligt deriverbara. Kan det då gälla att $\nabla^2 f(x^*) \preceq 0$? .... (1p)

2. Betrakta det kvadratiska programmeringsproblemet (QP) definierat av

$$(QP) \qquad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^T H x + c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

där

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad b = 5.$$

Till (QP) kan vi definiera det barriärtransformerade problemet (P_μ) givet av

$$(P_\mu) \qquad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^T H x + c^T x - \mu \sum_{j=1}^{3} \ln x_j \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x > 0, \end{array}$$

för en given positiv barriärparameter μ.

Låt $x(\mu)$ beteckna optimallösningen till (P_μ). Visa att $x(2) = (2\ 1\ 2)^T$ för det givna problemet. .... (5p)

3. Betrakta problemet (P) definierat av

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & x \in I\!R^n, \end{array}$$

där f är två gånger kontinuerligt deriverbar. (Vi har alltså inga bivillkor i problemet.)

(a) Formulera och bevisa andra ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor till (P). .... (2p)

(b) Formulera och bevisa andra ordningens tillräckliga optimalitetsvillkor till (P). .... (3p)

4. Betrakta det ickelinjära programmeringsproblemet

$$(NLP) \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g_1(x) = 0, \\ & g_2(x) \geq 0, \\ & x \in I\!R^2, \end{array}$$

där $f : I\!R^2 \to I\!R$ och $g : I\!R^2 \to I\!R^2$ är två gånger kontinuerligt deriverbara.

Antag att vi vill lösa (NLP) med hjälp av sekvensiell kvadratisk programmering. Antag speciellt att vi startar i punkten $x^{(0)} = (0\ 0)^T$ där

$$f(x^{(0)}) = 0, \qquad \nabla f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -2 & -4 \end{pmatrix}^T, \qquad \nabla^2 f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$g_1(x^{(0)}) = 0, \qquad \nabla g_1(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}^T, \qquad \nabla^2 g_1(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$g_2(x^{(0)}) = -2, \qquad \nabla g_2(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \qquad \nabla^2 g_2(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Antag också att initiala uppskattningen av lagrangemultiplikatorerna, $\lambda^{(0)}$, väljs till $\lambda^{(0)} = (0\ 2)^T$.

Genomför en iteration med sekvensiell kvadratisk programmering, dvs beräkna $x^{(1)}$ och $\lambda^{(1)}$. (Vi antar att ingen linjesökning behöver utföras.) Det kvadratiska programmeringsproblem som uppstår för lösas på valfritt sätt, som inte behöver vara systematiskt. .... (5p)

Anmärkning: I enlighet med bokens notation väljs tecknet på λ så att $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T g(x)$. Observera att bivillkor 1 är ett likhetsbivillkor och bivillkor 2 är ett olikhetsbivillkor.

5. Betrakta de primala och duala semidefinita programmeringsproblemen

$$(PSDP) \quad \begin{array}{ll} \min & x \\ \text{då} & Ix \succeq M, \end{array}$$

respektive

$$(DSDP) \quad \begin{array}{ll} \max & \operatorname{trace}(MY) \\ \text{då} & \operatorname{trace}(Y) = 1, \\ & Y = Y^T \succeq 0, \end{array}$$

där $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

(a) Ställ upp ett ickelinjärt ekvationssystem vars lösning ger den primal-duala trajektorian $x(\mu)$ och $Y(\mu)$ till $(PSDP)$ och $(DSDP)$ för ett givet μ. Ställ upp den allmänna formen för ett givet μ. Verifiera sedan att

$$x(0.01) \approx 3.6281 \quad \text{och} \quad Y(0.01) \approx \begin{pmatrix} 0.7216 & 0.4432 \\ 0.4432 & 0.2784 \end{pmatrix}.$$

.... (4p)

(b) Använd (5a) för att ge en överskattning av största egenvärdet till M. ... (1p)

Lycka till!