KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem.
Tisdagen den 26 augusti 2003 kl. 8.00–13.00.

Examinator: Anders Forsgren, tel 790 71 27

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, inget svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Betrakta det kvadratiska programmeringsproblemet

$$(QP) \qquad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^T H x + c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \end{array}$$

där H är en positivt semidefinit symmetrisk kvadratisk $n \times n$ matris och A är en $m \times n$ matris, där $m \geq n$. Antag att x^* är en optimallösning till (QP). Är då minst n bivillkor garanterat aktiva i x^*? .... (1p)

(b) Betrakta det ickelinjära programmeringsproblemet

$$(NLP) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & Ax \geq b, \end{array}$$

där $f : I\!R^n \to I\!R$ är två gånger kontinuerligt deriverbar. Antag x^* uppfyller $Ax^* = b$. Antag att det finns en riktning p så att $Ap \geq 0$ och $\nabla f(x^*)^T p < 0$. Kan då x^* vara en lokal minpunkt till (NLP)? .... (1p)

(c) Betrakta det ickelinjära programmeringsproblemet

$$(NLP) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & -g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \end{array}$$

där $f : I\!R^n \to I\!R$ och g_i, $i = 1, \ldots, m$, är två gånger kontinuerligt deriverbara konvexa funktioner på $I\!R^n$. Låt x^* vara en lokal minpunkt till (NLP). Är x^* då också garanterat en global minpunkt till (NLP)? .... (1p)

(d) Låt $f : I\!R^n \to I\!R$ vara två gånger kontinuerligt deriverbar med $\nabla^2 f(x) \succ 0$ för alla $x \in I\!R^n$. Man vill minimera f med Newtons metod. Antag att man startar i en punkt $x^{(0)}$ för vilken $\nabla f(x^{(0)}) \neq 0$ och där beräknar Newton-sökriktningen p. Blir då p garanterat en descentriktning till f i $x^{(0)}$? ....(1p)

(e) Betrakta optimeringsproblemet

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{array}$$

där g_i, $i = 1, \dots, m$, är två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner på $I\!R^n$. Antag att x^* är en lokal minpunkt till (P). Kan andra ordningens ordningens tillräckliga optimalitetsvillkor vara uppfyllda i x^*? .... (1p)

2. I denna uppgift ska vi titta på två optimeringsproblem som vardera definierar en sorts ”centerpunkt” till m givna olika punkter $(p_i \; q_i)$, $i = 1, \dots, m$, i $I\!R^2$.

(a) Betrakta det ickelinjära programmeringsproblemet (P_1) definierat av

$$(P_1) \qquad \begin{array}{ll} \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sqrt{(x_1 - p_i)^2 + (x_2 - q_i)^2} \\ \text{då} & x \in I\!R^2. \end{array}$$

Bestäm ett ickelinjärt ekvationssystem vars lösning ger optimalt värde på x.
....(2p)

(b) Betrakta det ickelinjära programmeringsproblemet (P_2) definierat av

$$(P_2) \qquad \begin{array}{ll} \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \left((x_1 - p_i)^2 + (x_2 - q_i)^2 \right) \\ \text{då} & x \in I\!R^2. \end{array}$$

Antag att Newtons metod används för att lösa (P_2) utgående från $x = (0 \; 0)^T$. Bestäm nästa iterationspunkt. Kommentera kvaliteten på den nya punkten.
....(3p)

3. Betrakta NLP-problemet

$$(NLP) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, 3, \\ & x \in I\!R^2, \end{array}$$

där $f : I\!R^2 \to I\!R$ och $g : I\!R^2 \to I\!R^3$ är två gånger kontinuerligt deriverbara.

Antag att vi vill lösa (NLP) med hjälp av sekvensiell kvadratisk programmering. Antag speciellt att vi startar i punkten $x^{(0)} = (0 \; 0)^T$ där

$$f(x^{(0)}) = 0, \qquad \nabla f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -10 & -10 \end{pmatrix}^T, \qquad \nabla^2 f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$g_1(x^{(0)}) = 1, \quad \nabla g_1(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}^T, \quad \nabla^2 g_1(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$g_2(x^{(0)}) = 0, \quad \nabla g_2(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad \nabla^2 g_2(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g_3(x^{(0)}) = 0, \quad \nabla g_3(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T, \quad \nabla^2 g_3(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Antag också att initiala uppskattningen av lagrangemultiplikatorerna, $\lambda^{(0)}$, väljs till $\lambda^{(0)} = (0\ 9\ 6)^T$.

Genomför en iteration med sekvensiell kvadratisk programmering, dvs beräkna $x^{(1)}$ och $\lambda^{(1)}$. (Vi antar att ingen linjesökning behöver utföras.) Det kvadratiska programmeringsproblem som uppstår för lösas på valfritt sätt, exempelvis grafiskt. . . . (5p)

Anmärkning: I enlighet med bokens notation väljs tecknet på λ så att $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T g(x)$.

4. Härled uttrycket för den symmetriska rang-1 uppdatering, C_k, i kvasi-Newton uppdateringen $B_{k+1} = B_k + C_k$. . . . . (5p)

5. Betrakta det semidefinita programmeringsproblemet

$$(SDP) \qquad \begin{array}{ll} \min & x \\ \text{då} & Ix \succeq -A, \\ & Ix \succeq A, \end{array}$$

där A är en given symmetrisk matris och I är enhetsmatrisen av samma dimension. (Observera att x är en skalär variabel.)

(a) Förklara i ord vad optimallösningen till (SDP) är. . . . . (1p)

(b) Bestäm lämpligt dualt problem som svarar mot (SDP). . . . .(3p)

(c) Bestäm en optimallösning till ditt duala problem. Du bör kunna skapa en optimal duallösning ur en matris av rang ett. . . . .(1p)
Ledning: För en symmetrisk matris av rang ett, uu^T, gäller $\operatorname{trace}(uu^T) = u^T u$.

Lycka till!