KTH Matematik

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem
Fredagen den 26 augusti 2005 kl. 8.00–13.00
Kortfattade lösningsförslag

---

1. (a) Ja.
(b) Ja.
(c) Ja.
(d) Ja.
(e) Nej.

2. Vi har

$$f(x) = \alpha x_1^4 + x_1x_3 - x_2^2 + x_1 - 3x_3,$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4\alpha x_1^3 + x_3 + 1 \\ -2x_2 \\ x_1 - 3 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 12\alpha x_1^2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g_1(x) = 3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \quad \nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \\ -2x_3 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 g_1(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Låt $x^* = (1\ 1\ 1)^T$. Då har vi en tillåten reguljär punkt där endast bivillkor 1 är aktivt. Därför kan vi bortse från övriga villkor. Första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor blir

$$\begin{pmatrix} 4\alpha + 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \lambda^*,$$

med $\lambda^* \geq 0$, vilket är uppfyllt för $\lambda^* = 1$ då $\alpha = -1$. Enda möjligheten är alltså $\alpha = -1$. Vi får då

$$\nabla^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

med $\alpha = -1$ insatt. Vi kan få en bas för nollrummet till $\nabla g_1(x^*)^T = (1\ 1\ 1)$ genom att partitionera $(1\ 1\ 1) = (B\ N)$, med $B = 1$, $N = (1\ 1)$ och låta

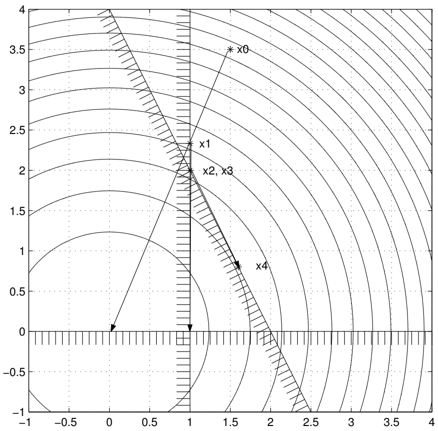
$$Z(x^*) = \begin{pmatrix} -B^{-1}N \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Då får vi

$$Z(x^*)^T \nabla^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) Z(x^*) = \begin{pmatrix} -10 & -11 \\ -11 & -10 \end{pmatrix},$$

vilket inte är en positivt definit matris. Alltså finns inget sådant värde på α.

3. Iterationerna kan illustreras i nedanstående figur,



I startpunkten x^0 är inga bivillkor aktiva. Sökriktningen ges till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen. Steglängden begränsas av bivillkor 2, vilket ger x^1. Därmed blir bivillkor 2 aktivt.

I x^1 ges sökriktningen till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen med bivillkor 2 aktivt. Steglängden begränsas av bivillkor 1, vilket ger x^2. Därmed blir bivillkor 1 och 2 aktiva.

I x^2 ges sökriktningen till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen med bivillkor 1 och 2 aktiva. Denna sökriktning är nollvektorn, och därmed blir steglängden ett accepterad samt $x^3 = x^2$.

I x^3 har vi bivillkor 1 och 2 aktiva. Då steglängden var ett, ska multiplikatorerna evalueras. Bivillkor 2 har negativ lagrangemultiplikator, varför detta villkor släpps.

Sökriktningen ges till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen med bivillkor 1 aktivt. Bivillkor 3 är mest begränsande, men steglängden ett är tillåtet, vilket ger x^4.

I x^4 har vi bivillkor 1 aktivt. Då steglängden var ett, ska multiplikatorerna evalueras. Bivillkor 1 har positiv lagrangemultiplikator, varför vi har hittat optimalpunkten.

(Om man räknar ut numeriska värden, får man $p^0 = (-\frac{3}{2}\ -\frac{7}{2})^T$, $\alpha^0 = \frac{1}{3}$, $x^1 = (1\ \frac{7}{3})^T$, $p^1 = (0\ -\frac{7}{3})^T$, $\alpha^1 = \frac{1}{7}$, $x^2 = (1\ 2)^T$, $p^2 = (0\ 0)^T$, $\alpha^2 = 1$, $x^3 = (1\ 2)^T$, $\lambda_1^3 = 4$, $\lambda_2^3 = -6$, $p^3 = (\frac{3}{5}\ -\frac{6}{5})^T$, $\alpha^3 = 1$, $x^4 = (\frac{8}{5}\ \frac{4}{5})^T$ och $\lambda_1^4 = \frac{8}{5}$.)

4. (Se kursmaterialet.)

5. Vi har

$$f(x) = 24 \ln x_1 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{24}{x_1} + 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} -\frac{24}{x_1^2} + 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$g(x) = x_1 - 1, \quad \nabla g(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) QP-subproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}p^T\nabla_{xx}^2\mathcal{L}(x^{(0)},\lambda^{(0)})p + \nabla f(x^{(0)})^T p \\ \text{då} & \nabla g(x^{(0)})^T p \geq -g(x^{(0)}). \end{array}$$

Insättning av numeriska värden ger

$$\nabla_{xx}^2\mathcal{L}(x^{(0)},\lambda^{(0)}) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 20 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$\nabla g(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g(x^{(0)}) = 1.$$

Vi ser omedelbart att $\nabla_{xx}^2\mathcal{L}(x^{(0)},\lambda^{(0)})$ inte är positivt semidefinit, eftersom (1,1)-elementet är negativt. QP-subproblemet saknar minpunkt, då målfunktionsvärdet går mot $-\infty$ för $p = (p_1\ 0)^T$ då $p_1 \to \infty$.

(b) Vi kan exempelvis "konvexifiera" QP-problemet genom att ersätta $\nabla_{xx}^2\mathcal{L}(x^{(0)},\lambda^{(0)})$ med en positivt semidefinit approximation. Ett sätt är att göra en modifierad Choleskyfaktorisering, där vi ersätter alla ickepositiva pivoteringselement med positiva. Till exempel kan vi byta tecken på (1,1)-elementet, vilket ger den positivt definita matrisen

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Det resulterande QP-problemet blir

$$\begin{array}{ll} \min & 2p_1^2 + 2p_1p_2 + p_2^2 + 20p_1 + 8p_2 \\ \text{då} & p_1 \geq -1. \end{array}$$

Vi har endast ett bivillkor, och behöver bara titta på två fall. Minpunkten om man bortser från bivillkoret är otillåten. Alltså blir bivillkoret aktivt, dvs $p_1 = -1$. Minimering för p_2 ger $p_2 = -3$. Med enhetssteg blir nya iterationspunkten $x^{(1)} = (1 \;\; -1)^T$, med $\lambda^{(1)} = 10$.

(Detta är optimalt x. Ytterligare en iteration ger optimalt λ, $\lambda = 24$.)