KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem.
Torsdagen den 6 mars kl. 8.00–13.00.

Kortfattade lösningsförslag.

---

1. (a) Ja.

(b) Ja.

(c) Nej.

(d) Ja.

(e) Ja.

2. (a) Vi ser att x^* är en tillåten punkt där bivillkor 2 är det enda bindande bivillkoret. Eftersom $\nabla g_2(x^*) \neq 0$ måste det finnas λ_2^* så att $\nabla f(x^*) = \nabla g_2(x^*)\lambda_2^*$ om x^* ska vara en lokal minpunkt. Detta är uppfyllt för $\lambda_2^* = 1$.

Därmed får vi fortsätta undersöka andra ordningens optimalitetsvillkor. Vi får

$$\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = \nabla^2 f(x^*) - \lambda_2^* \nabla^2 g_2(x^*) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

En matris $Z(x^*)$ vars kolumner bildar bas för null$(\nabla g(x^*)^T)$ ges exempelvis av

$$Z(x^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Därmed blir

$$Z(x^*)^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) Z(x^*) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

vilket inte är en positivt semidefinit matris. (Exempelvis är dess determinant negativ.) Alltså är x^* en reguljär punkt som inte uppfyller andra ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor. Därmed är x^* inte en lokal minpunkt till (P).

(b) Vi behöver lägga till ett bivillkor så att reducerade Hessianen till lagrangefunktionen blir positivt definit. Exempelvis kan vi välja $x_2 = 0$. Därmed blir

$$Z(x^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

vilket ger $Z(x^*)^T\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^*,\lambda^*)Z(x^*) = 2 > 0$. Eftersom de bindande bivillkoren båda är likhetsbivillkor är det därmed en lokal minpunkt. Valet är alltså $a = (0\ 1\ 0)^T$ och $b = 0$. (Det finns många möjliga val av a och b.)

3. (Se kursmaterialet.)

4. Vi har

$$f(x) = (x_1+2)^2 + (x_2+3)^2, \quad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1+2) \\ 2(x_2+3) \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$
$$g_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2, \quad \nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 g_1(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$g_2(x) = x_2, \quad \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Insättning ger första QP-problemet enligt

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{3}{2}p_1^2 + \frac{3}{2}p_2^2 + 6p_1 + 8p_2 \\ \text{då} & -p_1 - p_2 \ge 0, \\ & p_2 \ge -1. \end{array}$$

Lösning, exempelvis grafiskt, ges av $p = (-2\ -1)^T$, $\lambda = (0\ 5)^T$. (Man kan också betrakta problemet och inse att bivillkoret $-p_1 - p_2 \ge 0$ inte kommer att vara aktivt. Om det bivillkoret tas bort får man två separata envariabelproblem.) I uppgiften krävs ingen linjesökning, så vi väljer steglängden ett. Därmed får vi $x^{(1)} = (-1\ 0)^T$ och $\lambda^{(1)} = (0\ 5)^T$.

5. (a) Matrisen

$$\begin{pmatrix} Ix & A^T \\ A & Ix \end{pmatrix}$$

har egenvärden $x \pm \sigma_i$, $i = 1, \ldots, n$. Därmed ges optimalt x av största singulärvärdet hos A, dvs σ_1.

(b) Det duala problemet blir

$$(DSDP) \quad \begin{array}{ll} \max & -\operatorname{trace}(AY_{12}) - \operatorname{trace}(A^TY_{21}) \\ \text{då} & \operatorname{trace}(Y_{11}) + \operatorname{trace}(Y_{22}) = 1, \\ & \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11}^T & Y_{21}^T \\ Y_{12}^T & Y_{22}^T \end{pmatrix} \succeq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Egenskaper hos spåroperatorn ger

$$\operatorname{trace}(AY_{12}) = \operatorname{trace}(AY_{21}^T) = \operatorname{trace}(Y_{21}A^T) = \operatorname{trace}(A^TY_{21}),$$

varför vi kan skriva problemet som

$$
(DSDP)\qquad
\begin{array}{ll}
\max & -2\,\mathrm{trace}(AY_{12}) \\
\text{då} & \mathrm{trace}(Y_{11}) + \mathrm{trace}(Y_{22}) = 1, \\
& \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11}^T & Y_{21}^T \\ Y_{12}^T & Y_{22}^T \end{pmatrix} \succeq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

(c) Då vi vet att optimalvärdet är uppåt begränsat av σ_1 räcker det att hitta tillåtet Y så att $\mathrm{trace}(AY_{12}) = -\sigma_1/2$. Om vi sätter in $A = U\Sigma V^T$ betyder det att $\mathrm{trace}(U\Sigma V^T Y_{12}) = -\sigma_1/2$. Om vi nu enligt uppgiftslydelsen låter $Y_{12} = -(1/2)v_1u_1^T$ får vi

$$
\mathrm{trace}(U\Sigma V^T \frac{1}{2} v_1 u_1^T) = \frac{1}{2}\,\mathrm{trace}(\Sigma V^T v_1 u_1^T U) = \frac{1}{2}\,\mathrm{trace}(\sigma_1 e_1 e_1^T) = \frac{\sigma_1}{2},
$$

eftersom U och V är ortonormala matriser. Därmed kan vi låta $Y_{11} = (1/2)v_1v_1^T$ och $Y_{22} = (1/2)u_1u_1^T$, vilket ger tillåten lösning då $\mathrm{trace}(Y_{11}) + \mathrm{trace}(Y_{22}) = 1/2 + 1/2 = 1$. Alltså har vi en optimallösning, som ges av

$$
\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -v_1 \\ u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v_1^T & u_1^T \end{pmatrix}.
$$