KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem.
Torsdagen den 8 mars 2001 kl. 14.00–19.00.

Kortfattade lösningsförslag.

1. (a) Nej.

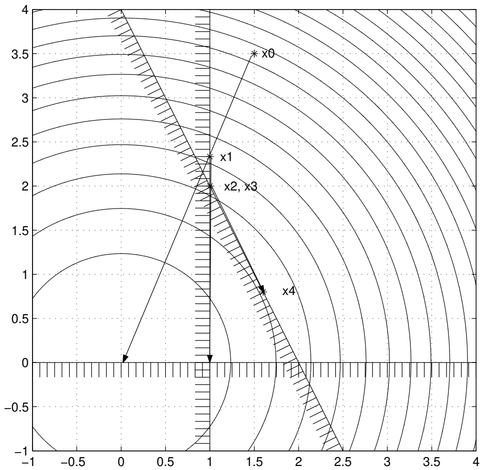
(b) Ja.

(c) Ja.

(d) Nej.

(e) Ja.

2. Iterationerna kan illustreras i nedanstående figur,



I startpunkten x^0 är inga bivillkor aktiva. Sökriktningen ges till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen. Steglängden begränsas av bivillkor 2, vilket ger x^1. Därmed blir bivillkor 2 aktivt.

I x^1 ges sökriktningen till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen med bivillkor 2 aktivt. Steglängden begränsas av bivillkor 1, vilket ger x^2. Därmed blir bivillkor 1 och 2 aktiva.

I x^2 ges sökriktningen till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen med bivillkor 1 och 2 aktiva. Denna sökriktning är nollvektorn, och därmed blir steglängden ett accepterad samt $x^3 = x^2$.

I x^3 har vi bivillkor 1 och 2 aktiva. Då steglängden var ett, ska multiplikatorerna evalueras. Bivillkor 2 har negativ lagrangemultiplikator, varför detta villkor släpps. Sökriktningen ges till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen med bivillkor 1 aktivt. Bivillkor 3 är mest begränsande, men steglängden ett är tillåtet, vilket ger x^4.

I x^4 har vi bivillkor 1 aktivt. Då steglängden var ett, ska multiplikatorerna evalueras. Bivillkor 1 har positiv lagrangemultiplikator, varför vi har hittat optimalpunkten.

(Om man räknar ut numeriska värden, får man $p^0 = (-\frac{3}{2}\ -\frac{7}{2})^T$, $\alpha^0 = \frac{1}{3}$, $x^1 = (1\ \frac{7}{3})^T$, $p^1 = (0\ -\frac{7}{3})^T$, $\alpha^1 = \frac{1}{7}$, $x^2 = (1\ 2)^T$, $p^2 = (0\ 0)^T$, $\alpha^2 = 1$, $x^3 = (1\ 2)^T$, $\lambda_1^3 = 4$, $\lambda_2^3 = -6$, $p^3 = (\frac{3}{5}\ -\frac{6}{5})^T$, $\alpha^3 = 1$, $x^4 = (\frac{8}{5}\ \frac{4}{5})^T$ och $\lambda_1^4 = \frac{8}{5}$.)

3. Vi har

$$f(x) = \frac{1}{2}(x_1+1)^2 + \frac{1}{2}(x_2+2)^2, \qquad g(x) = 3(x_1+x_2-2)^2 + (x_1-x_2)^2 - 6,$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_1+1 \\ x_2+2 \end{pmatrix}, \qquad \nabla g(x) = \begin{pmatrix} 8x_1+4x_2-12 \\ 4x_1+8x_2-12 \end{pmatrix},$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \nabla^2 g(x) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Insättning ger första QP-problemet enligt

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + p_1 + 2p_2 \\ \text{då} & -12p_1 - 12p_2 = -6. \end{array}$$

Detta är ett konvext QP-problem med global optimallösning given av

$$\begin{aligned} p_1 + 12\lambda &= -1, \\ p_2 + 12\lambda &= -2, \\ -12p_1 - 12p_2 &= -6. \end{aligned}$$

Lösningen ges av $p_1 = 3/4$, $p_2 = -1/4$ och $\lambda = -7/48$, vilket stämmer med SQP-lösarens utskrift.

(b) Vi ser att $\nabla^2 f(x)$ och $\nabla^2 g(x)$ är positivt definita, oberoende av x. Dessutom är λ ickepositiv i alla iterationer. Detta medför att vi får konvergens mot en punkt som uppfyller första ordningens optimalitetsvillkor för problemet

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) \le 0. \end{array}$$

Detta problem är ett konvext problem, och dessutom en relaxering av ursprungsproblemet. Följaktligen får vi konvergens till en global minpunkt till detta problem, vilket också är en global minpunkt till (NLP).

4. (Se kursmaterialet.)

5. (a) Det relaxerade problemet är ett ickekonvext kvadratiskt programmeringsproblem. För att få en undre gräns till ursprungsproblemet behöver vi beräkna globalt minimum till detta ickekonvexa relaxerade problem, vilket i allmänhet är för beräkningskrävande.

(b) Om vi låter (SDP') vara problemet som uppstår då bivillkoret $Y = xx^T$ läggs till (SDP) kan vi ersätta Y med xx^T, vilket med hjälp av ledning (i) ger

$$(SDP') \qquad \begin{array}{ll} \min & c^Tx + \frac{1}{2}x^THx \\ \text{då} & \begin{pmatrix} xx^T & x \\ x^T & 1 \end{pmatrix} \succeq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ & x_j^2 = x_j, \quad j = 1, \ldots, n. \end{array}$$

Via ledning (ii) ser vi att bivillkoret

$$\begin{pmatrix} xx^T & x \\ x^T & 1 \end{pmatrix} \succeq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alltid är uppfyllt, varför (SDP') kan skrivas

$$(SDP') \qquad \begin{array}{ll} \min & c^Tx + \frac{1}{2}x^THx \\ & x_j^2 = x_j, \quad j = 1, \ldots, n. \end{array}$$

Men då $x_j^2 = x_j$ om och endast om $x_j \in \{0, 1\}$ följer att (SDP') och (P) är ekvivalenta.