KTH Matematik

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem
Tisdagen den 25 oktober 2005 kl. 14.00–19.00

Examinator: Anders Forsgren, tel. 790 71 27.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, utelämnat svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Betrakta ett linjärprogrammeringsproblem (LP) på formen

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Har (LP) garanterat minst en tillåten lösning? .... (1p)

(b) Antag att linjärprogrammeringsproblemet (LP) på formen

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

har en optimallösning x^*. Finns det då garanterat y så att $A^T y \leq c$? ..... (1p)

(c) Betrakta heltalsprogrammeringsproblemet (IP) givet av

$$(IP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & x_j \in \{0,1\}, \quad \text{för alla } j, \end{array}$$

där $A \in I\!R^{m \times n}$. För ett fixerat $u \in I\!R^m$, definiera problemet (IP_u) enligt

$$(IP_u) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x - u^T(Ax - b) \\ & x_j \in \{0,1\}, \quad \text{för alla } j. \end{array}$$

Är (IP_u) garanterat en relaxering av (IP) för alla $u \in I\!R^m$? .... (1p)

(d) Antag att linjärprogrammeringsproblemet (LP) på formen

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

har minst en optimallösning. Är mängden $\{x^* : x^* \text{optimal till } (LP)\}$ garanterat en konvex mängd? .... (1p)

(e) Antag att heltalsprogrammeringsproblemet (IP) på formen

$$(IP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \quad x \text{ heltalig}, \end{array}$$

har minst en optimallösning. Är mängden $\{x^* : x^* \text{optimal till } (IP)\}$ garanterat en konvex mängd? .... (1p)

2. Betrakta linjärprogrammeringsproblemet (LP) på formen

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & c_3 & 3 \end{pmatrix}^T,$$

där c_3 är en parameter.

För $c_3 = 0$ har vi den optimala baslösningen $x = (1\ 1\ 2\ 0)^T$, med tillhörande duallösningar $y = (1\ 0\ 1)^T$ och $s = (0\ 0\ 0\ 2)^T$. Optimalvärdet är 3.

Bestäm optimalvärdet till (LP) som funktion av c_3 för $0 \leq c_3 \leq 1/2$. Bestäm också tillhörande optimallösningar till (LP). Utgå från den givna lösningen. .... (5p)

3. Låt (P) och (D) definieras av

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (D) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}$$

Betrakta, för en fix positiv barriärparameter μ, det primal-duala ekvationssystemet

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ A^T y + s &= c, \\ XSe &= \mu e, \end{aligned}$$

där vi dessutom implicit kräver $x > 0$ och $s > 0$. Här är $X = \operatorname{diag}(x)$, $S = \operatorname{diag}(s)$ och e är en n-vektor med alla komponenter ett.

(a) Antag att $x(\mu)$, $y(\mu)$ och $s(\mu)$ löser det primal-duala ekvationssystemet för ett givet positivt μ samt att $x(\mu) > 0$ och $s(\mu) > 0$. Visa att $x(\mu)$ är tillåten till (P) samt $y(\mu), s(\mu)$ är tillåtna till (D) med dualitetsgap $n\mu$. .... (2p)

(b) Härled det linjära ekvationssystem som uppstår då det primal-duala ekvationssystemet ska lösas med Newtons metod. ....(2p)

(c) Hur hanteras de implicita kraven $x > 0$ och $s > 0$ i en Newton-baserad inrepunktsmetod som approximativt löser det primal-duala ekvationssystemet för avtagande värden på μ? .... (1p)

4. Betrakta heltalsprogrammeringsproblemen (IP_1) och (IP_2) definierade enligt

$$(IP_1) \quad \begin{array}{ll} \min & -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \\ \text{då} & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 \geq -8, \\ & -x_1 - x_2 \geq -1, \\ & -x_3 - x_4 \geq -1, \\ & x_j \geq 0, \quad x_j \text{ heltalig}, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{array}$$

respektive

$$(IP_2) \quad \begin{array}{ll} \min & -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \\ \text{då} & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 \geq -8, \\ & -x_1 - x_2 \geq -1, \\ & -x_3 - x_4 \geq -1, \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{array}$$

Skillnaden är alltså att variablerna är heltaliga i (IP_1) och binära i (IP_2). På grund av bivillkorsstrukturen är dock (IP_1) och (IP_2) ekvivalenta.

(a) Lagrangerelaxera bivillkoren $-x_1 - x_2 \geq -1$ och $-x_3 - x_4 \geq -1$ i (IP_1) med ickenegativa lagrangemultiplikatorer u_1 och u_2. Bestäm den duala målfunktionen och en tillhörande subgradient för $u = (2\ 4)^T$. Det lagrangerelaxerade problemet får lösas med valfri metod, som inte behöver vara systematisk. ......(2p)

(b) Lagrangerelaxera bivillkoren $-x_1 - x_2 \geq -1$ och $-x_3 - x_4 \geq -1$ i (IP_2) med ickenegativa lagrangemultiplikatorer u_1 och u_2. Bestäm den duala målfunktionen och en tillhörande subgradient för $u = (2\ 4)^T$. Det lagrangerelaxerade problemet får lösas med valfri metod, som inte behöver vara systematisk. ......(2p)

(c) Kommentera eventuella skillnader mellan dina svar i uppgift (4a) och dina svar i uppgift (4b). .... (1p)

5. Betrakta ett cutting-stock problem med följande data:

$$W = 48, \quad m = 3, \quad w_1 = 6, \quad w_2 = 7, \quad w_3 = 9, \quad b = \begin{pmatrix} 60 & 80 & 70 \end{pmatrix}^T.$$

Beteckningarna och frågeställningen är i enlighet med läroboken. Givet är rullar av bredd W. Efterfrågat är rullar av m olika bredder. Rulle i har bredd w_i, $i = 1, \ldots, m$.

Efterfrågan för rulle i är b_i rullar, $i = 1, \dots, m$. Man vill skära W-rullarna så att minimalt antal W-rullar går åt.

Föreslaget är att använda skärmönstren $(8\ 0\ 0)^T$, $(1\ 6\ 0)^T$ och $(2\ 0\ 4)^T$.

Bestäm hur W-rullarna bör skäras. Utgå från det föreslagna skärmönstret ovan. Ge också en undre gräns för hur många rullar som behövs. Det eller de subproblem som uppstår får lösas på valfritt sätt, som inte behöver vara systematiskt. ....(5p)

Lycka till!