KTH Matematik

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem
Torsdagen den 15 april 2004 kl. 8.00–13.00

Examinator: Anders Forsgren, tel. 790 71 27.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, utelämnat svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Betrakta linjärprogrammeringsproblemet (LP) givet av

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Antag att $\widehat{x}$ och $\bar{x}$ är två (olika) tillåtna lösningar till (LP). Är då $\frac{1}{2}\widehat{x} + \frac{1}{2}\bar{x}$ garanterat tillåten till (LP)? . . . . (1p)

(b) Betrakta linjärprogrammeringsproblemet (LP) givet av

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Antag att $\widehat{x}$ och $\bar{x}$ är två (olika) optimallösningar till (LP). Är då $\frac{1}{2}\widehat{x} + \frac{1}{2}\bar{x}$ garanterat optimal till (LP)? . . . . (1p)

(c) Betrakta heltalsprogrammeringsproblemet (IP) definierat av

$$(IP) \qquad \begin{array}{lll} \min & c^T x & \\ \text{då} & Ax \geq b, & \\ & x \geq 0, & \text{heltal}, \end{array}$$

och det tillhörande LP-relaxerade problemet

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Antag att $\widetilde{x}$ är en tillåten lösning till (IP) sådan att $c^T\widetilde{x} = 7$. Kan då optimalvärdet till (LP) vara 8? . . . . (1p)

(d) Antag att problemet

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

har en optimallösning x^* sådan att $x^* > 0$. Är då garanterat varje tillåten lösning till (LP) också optimal till (LP)? .... (1p)

(e) Betrakta heltalsprogrammeringsproblemet (IP) definierat av

$$(IP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & a^T x \geq b, \\ & Cx \geq d, \\ & x \geq 0, \quad \text{heltal}, \end{array}$$

där $a \in \mathbb{R}^n$ och $b \in \mathbb{R}$.

Till (IP) kan vi definiera det duala problemet (D) enligt

$$(D) \qquad \begin{array}{ll} \max & \varphi(u) \\ \text{då} & u \geq 0, \end{array}$$

där $\varphi(u) = \min\{c^T x + u \cdot (b - a^T x) : Cx \geq d, x \geq 0 \text{ heltal}\}$.

Antag att $u^* = 1$ är en optimallösning till (D). Kan då $s = 2$ vara en subgradient till φ i $\tilde{u} = 2$? .... (1p)

2. Betrakta linjärprogrammeringsproblemet (LP) givet av

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad c = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}^T.$$

Till (LP) kan vi definiera det barriärtransformerade problemet (P_μ) givet av

$$(P_\mu) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x - \mu \sum_{j=1}^{3} \ln x_j \\ \text{då} & Ax = b, \quad x > 0, \end{array}$$

för en given positiv barriärparameter μ.

Låt $x(\mu)$ beteckna optimallösningen till (P_μ). Visa att $x(6) = (3\ 2\ 1)^T$ för det givna problemet. .... (5p)

3. Betrakta linjärprogrammeringsproblemet (LP) givet av

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

där

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad c = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T.$$

Låt $\widetilde{x} = (1\ 2\ 1\ 0)^T$.

(a) Det går att skriva $\widetilde{x}$ som en konvexkombination av två tillåtna baslösningar till (LP). Bestäm denna konvexkombination. .... (3p)

(b) Visa att $\widetilde{x}$ är en optimallösning till (LP). .... (2p)

4. Låt (P) och (D) definieras av

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (D) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}$$

(a) Antag att x är en tillåten lösning till (P) och att y, s är en tillåten lösning till (D). Visa att dualitetsgapet för dessa lösningar ges av $x^T s$ och motivera slutsatsen att vi har optimala lösningar till respektive problem om och endast om $x_j \cdot s_j = 0$ för alla j. .... (2p)
(Det får antas känt att om (P) har en optimallösning så har även (D) en optimallösning, och optimalvärdena är lika.)

(b) Visa att om det finns någon optimallösning till (P), så finns det minst en extrempunkt (tillåten baslösning) som är optimal. .... (3p)
(Exempelvis kan representationssatsen utnyttjas utan bevis.)

5. Antag att ett flygbolag vill planera besättning för m flygrutter, som alla börjar och slutar på samma flygplats. Det leder till ett besättningsplaneringsproblem (IP) på formen

$$(IP) \qquad \begin{array}{ll} \min & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j \\ \text{då} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1, \ \ i = 1, \ldots, m, \\ & x_j \geq 0, \ \ x_j \text{ heltalig}, \ \ j = 1, \ldots, n. \end{array}$$

Här svarar varje rad i bivillkorsmatrisen A mot en flygrutt och varje kolumn i A svarar mot ett flygmönster. Ett flygmönster är ett antal flygrutter som utförs av samma besättning under ett arbetspass. Om vi låter A_j beteckna kolumn j i bivillkorsmatrisen blir $a_{ij} = 1$ om flygrutt i täcks av flygmönster j, och $a_{ij} = 0$ annars.

Flygtiden för rutt i är känd, t_i timmar, $i = 1, \ldots, m$. Av arbetstidsskäl och säkerhetsskäl krävs dels att den totala tiden för ett flygmönster inte får överstiga T timmar, dels att det inte får ingå mer än N stycken rutter i något flygmönster.

Det tillhörande LP-relaxerade problemet kan skrivas på formen

$$
(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j \\ \text{då} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1, \ i = 1, \ldots, m, \\ & x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n. \end{array}
$$

Antal kolumner i A blir mycket stort varför vi antar att (LP) löses med kolumngenerering. Ställ upp det subproblem som uppstår då (LP) löses med kolumngenerering. .... (5p)

Lycka till!