KTH Matematik

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem
Fredagen den 19 december 2003 kl. 14.00–19.00

Examinator: Anders Forsgren, tel. 790 71 27.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, utelämnat svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Betrakta linjärprogrammeringsproblemet (LP) givet av

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Antag att $\widehat{x}$ och $\bar{x}$ är två (olika) optimala baslösningar till (LP). Om vi löser (LP) med simplexmetoden, kan den då ge $\frac{1}{2}\widehat{x} + \frac{1}{2}\bar{x}$ som optimallösning? .... (1p)

(b) Betrakta linjärprogrammeringsproblemet (LP) givet av

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Antag att $\widehat{x}$ och $\bar{x}$ är två (olika) optimala baslösningar till (LP). Om vi löser (LP) med en inrepunktsmetod, kan den då ge $\frac{1}{2}\widehat{x} + \frac{1}{2}\bar{x}$ som optimallösning? .... (1p)

(c) Betrakta linjärprogrammeringsproblemet (LP) givet av

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Antag att $\widehat{x}$ och $\bar{x}$ är två (olika) optimallösningar till (LP). Är då $-\frac{1}{2}\widehat{x} + \frac{3}{2}\bar{x}$ garanterat optimal till (LP), om den är tillåten? .... (1p)

(d) Betrakta linjärprogrammeringsproblemen (LP_1) och (LP_2) givna av

$$(LP_1)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (LP_2)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Är (LP_2) garanterat en relaxering av (LP_1)? .... (1p)

(e) Betrakta det linjära heltalsprogrammeringsproblemet (IP) givet av

$$(IP)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & x \geq 0,\ x \text{ heltalig}. \end{array}$$

Har (IP) garanterat ett konvext tillåtet område? .... (1p)

2. Betrakta linjärprogrammeringsproblemet (LP) givet av

$$(LP)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{och}$$
$$c = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Bestäm alla värden på b_2 som ger en optimallösning där $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. För att få full poäng på uppgiften ska du använda dig av en metod som inte kräver lösning av fler än tre linjära ekvationssystem. .... (5p)

3. Låt (P) och (D) definieras av

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (D)\quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}$$

(a) Antag att x är en tillåten lösning till (P) och att y, s är en tillåten lösning till (D). Visa att dualitetsgapet för dessa lösningar ges av $x^T s$ och motivera slutsatsen att vi har optimala lösningar till respektive problem om och endast om $x_j \cdot s_j = 0$ för alla j. .... (2p)
(Det får antas känt att om (P) har en optimallösning så har även (D) en optimallösning, och optimalvärdena är lika.)

(b) Visa att om det finns någon optimallösning till (P), så finns det minst en extrempunkt (tillåten baslösning) som är optimal. .... (3p)
(Exempelvis kan representationssatsen utnyttjas utan bevis.)

4. Betrakta det linjära heltalsprogrammeringsproblemet (IP) definierat av

$$(IP)\qquad \begin{array}{ll} \min & -7x_1 - 8x_2 - 9x_3 \\ \text{då} & -x_1 - x_2 \geq -2, \\ & -x_2 - x_3 \geq -2, \\ & -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 \geq -9, \\ & x \geq 0,\ x \text{ heltalig.} \end{array}$$

(a) Antag att de två första bivillkoren lagrangerelaxeras med ickenegativ multiplikatorvektor $u \in I\!R^2$ (där u_1 svarar mot första bivillkoret och u_2 svarar mot andra bivillkoret). Vi får då ett motsvarande dualt problem

$$(D)\qquad \begin{array}{ll} \max & \varphi(u) \\ \text{då} & u \geq 0,\ u \in I\!R^2. \end{array}$$

Låt speciellt $\widehat{u}_1 = 1$ och $\widehat{u}_2 = 3$. Bestäm en subgradient till φ i $\widehat{u}$. Det lagrangerelaxerade problem som uppstår får lösas på valfritt sätt, som inte behöver vara systematiskt. .... (3p)

(b) Låt $\bar{u}_1 = 0$ och $\bar{u}_2 = 5$. Använd svaret från (4a) för visa att $\bar{u}$ inte kan vara optimallösning till (D). .... (2p)

5. Betrakta linjärprogrammeringsproblemet (LP) givet av

$$(LP)\qquad \begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 + x_4 \\ \text{då} & x_1 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 0, \\ & -1 \leq x_j \leq 1, \quad j = 1, \ldots, 4. \end{array}$$

Bestäm en optimallösning till (LP) som kan skrivas som en konvexkombination av punkterna $(-1\ \ -1\ \ -1\ \ -1)^T$, $(1\ \ -1\ \ -1\ \ 1)^T$ och $(1\ \ -1\ \ 1\ \ -1)^T$. .... (5p)

Ledning I: De givna punkterna är extrempunkter till mängden S, där $S = \{x \in I\!R^4 : -1 \leq x_j \leq 1, j = 1, \ldots, 4\}$.

Ledning II: Följande relation kan vara användbar:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & -\frac{3}{20} & \frac{11}{20} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{20} & \frac{3}{20} \end{pmatrix}.$$

Lycka till!