KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem.
Lördagen den 30 augusti 2003 kl. 8.00–13.00.

Examinator: Anders Forsgren, tel 790 71 27

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, utelämnat svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Betrakta ett linjärt heltalsprogrammeringsproblem (IP) och dess LP-relaxering (LP) definierade enligt

$$(IP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & x \geq 0, \ x \text{ heltalig}, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (LP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Antag att (LP) har minst en optimallösning. Har då (IP) garanterat minst en tillåten lösning? ....(1p)

(b) Betrakta linjärprogrammeringsproblemet

$$(LP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Antag att $\bar{x}$ och $\widehat{x}$ är två olika optimallösningar till (LP). Kan då $-\frac{1}{2}\bar{x} + \frac{3}{2}\widehat{x}$ vara en optimallösning till (LP)? .... (1p)

(c) Betrakta det linjära heltalsprogrammeringsproblemet

$$(IP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \quad Cx \geq d, \\ & x \geq 0, \ x \text{ heltalig}, \end{array}$$

där $A \in I\!R^{m\times n}$. För en fix vektor $u \in I\!R^m$ (som kan ha positiva och negativa komponenter), betrakta problemet

$$
(IP_u) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x + u^T(b - Ax) \\ \text{då} & Cx \geq d, \\ & x \geq 0,\ x \text{ heltalig.} \end{array}
$$

Är (IP_u) garanterat en relaxering av (IP)? .... (1p)

(d) Betrakta det primala och duala paret linjärprogrammeringsproblem

$$
(LP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (DLP) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}
$$

Antag att $\widehat{x}$ är tillåten till (LP) med $\widehat{x}_1 = 2$ samt att $\widehat{y}$ och $\widehat{s}$ tillsammans är tillåtna till (DLP) med $\widehat{s}_1 = 1$. Gäller då garanterat att $c^T\widehat{x} - b^T\widehat{y} \geq 2$? .. (1p)

(e) Antag att man löser LP-relaxeringen som svarar mot ett cutting-stock problem. Blir då LP-problemets optimallösning garanterat heltalig? ....(1p)

2. Låt (LP) definieras av

$$
(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array}
$$

där

$$
A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ c_2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},
$$

för en parameter c_2.

Bestäm alla värden på c_2 så att $x^* = (0\ \frac{1}{5}\ 0\ \frac{3}{5})^T$ är en optimal baslösning till (LP). Utgå från den givna baslösningen. ....(5p)

3. Låt (P) och (D) definieras av

$$
(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (D) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}
$$

(a) Antag att x är en tillåten lösning till (P) och att y, s är en tillåten lösning till (D). Visa att dualitetsgapet för dessa lösningar ges av $x^T s$ och motivera slutsatsen att vi har optimala lösningar till respektive problem om och endast om $x_j \cdot s_j = 0$ för alla j. .... (2p)

(Det får antas känt att om (P) har en optimallösning så har även (D) en optimallösning, och optimalvärdena är lika.)

(b) Visa att om det finns någon optimallösning till (P), så finns det minst en extrempunkt (tillåten baslösning) som är optimal. ....(3p)

(Exempelvis kan representationssatsen utnyttjas utan bevis.)

4. Betrakta heltalsprogrammeringsproblemet (IP) definierat enligt

$$(IP)\quad \begin{array}{ll} \min & -3x_1 - 5x_2 - 7x_3 - 8x_4 \\ \text{då} & -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \geq -3, \\ & -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \geq -8, \\ & x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,2,3,4. \end{array}$$

(a) Lagrangerelaxera bivillkoret $-2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \geq -8$ i (IP) med en ickenegativ lagrangemultiplikator u. Ange det optimeringsproblem som ger den duala målfunktionen $\varphi(u)$ för ett fixt $u \geq 0$. ....(2p)

(b) Bestäm $\varphi(\frac{8}{5})$ på valfritt sätt, som inte behöver vara systematiskt. Du kan utnyttja att problemet är litet. ....(2p)

(c) Förklara varför det duala problem som uppstår från lagrangerelaxeringen i (4a) inte ger bättre underskattning till optimalvärdet till (IP) än LP-relaxering. ....(1p)

5. Betrakta optimeringsproblemet (LP) givet av

$$(LP)\quad \begin{array}{ll} \min & 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 \\ \text{då} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ & |x_1| + |x_2| \leq 1, \\ & |x_3| + |x_4| \leq 1. \end{array}$$

Vi kan skriva (LP) som ett linjärprogrammeringsproblem genom att ersätta olikheterna $|x_1| + |x_2| \leq 1$ och $|x_3| + |x_4| \leq 1$ med linjära olikheter, men det är inte nödvändigt att göra det explicit här. Istället är din uppgift att lösa (LP) med hjälp av Dantzig-Wolfe dekomposition. Betrakta bivillkoret $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$ som huvudrestriktion. Den konvexa mängden $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \ : \ |x_1|+|x_2| \leq 1, |x_3|+|x_4| \leq 1\}$ har extrempunkter av typen $(0\ \text{-}1\ 1\ 0)^T$, $(1\ 0\ 0\ \text{-}1)^T$, etc. Starta med den tillåtna baslösning som erhålls genom att utgå från extrempunkterna $(\text{-}1\ 0\ \text{-}1\ 0)^T$ och $(0\ 1\ 0\ 1)^T$. De subproblem som uppstår kan du lösa genom inspektion. ....(5p)

Lycka till!