KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem.
Fredagen den 2 maj 2003 kl. 8.00–13.00.

Examinator: Anders Forsgren, tel 790 71 27

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, utelämnat svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Betrakta linjärprogrammeringsproblemet

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \ge b, \\ & x \ge 0. \end{array}$$

Antag att $\bar{x}$ och $\widehat{x}$ är optimallösningar till (LP). Är då $\frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\widehat{x}$ garanterat en optimallösning till (LP)? .... (1p)

(b) Betrakta ett binärt heltalsprogrammeringsproblem (IP) på formen

$$(IP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \ge b, \\ & x_j \in \{0,1\},\ j = 1,\dots,n, \end{array}$$

och dess tillhörande LP-relaxering

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \ge b, \\ & 0 \le x_j \le 1,\ j = 1,\dots,n. \end{array}$$

Antag att både (LP) och (IP) har ändliga optimalvärden. Kan det då gälla att optval$(LP) >$ optval(IP), där "optval" betecknar optimalvärdet till respektive problem? .... (1p)

(c) Låt (P) och (D) beteckna ett primal-dualt par av linjärprogrammeringsproblem enligt

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (D) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}$$

Antag att $\widetilde{y}$, $\widetilde{s}$ är en optimallösning till (D) sådana att $\widetilde{y}_1 > 0$ och $\widetilde{s}_1 = 0$. Antag vidare att $\widetilde{x}$ är en tillåten lösning till (P) sådan att $\widetilde{x}_1 > 0$. Kan $\widetilde{x}$ vara optimallösning till (P)? .... (1p)

(d) Betrakta det linjära heltalsprogrammeringsproblemet

$$(IP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \quad Cx \geq d, \\ & x \geq 0, \;\; x \text{ heltalig,} \end{array}$$

där $A \in I\!\!R^{m \times n}$. För en fix vektor $u \in I\!\!R^m$ (som kan ha positiva och negativa komponenter), betrakta problemet

$$(IP_u) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x + u^T(b - Ax) \\ \text{då} & Cx \geq d, \\ & x \geq 0, \;\; x \text{ heltalig.} \end{array}$$

Är (IP_u) garanterat en relaxering av (IP)? .... (1p)

(e) Betrakta det linjära heltalsprogrammeringsproblemet

$$(IP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & x \geq 0, \;\; x \text{ heltalig.} \end{array}$$

Antag att $\bar{x}$ och $\widehat{x}$ är globala optimallösningar till (IP). Är då $\frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\widehat{x}$ garanterat en global optimallösning till (IP)? .... (1p)

2. Låt (P) och (D) definieras av

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (D) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}$$

Betrakta, för en fix positiv barriärparameter μ, det primal-duala ekvationssystemet

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ A^T y + s &= c, \\ XSe &= \mu e, \end{aligned}$$

där vi dessutom implicit kräver $x > 0$ och $s > 0$. Här är $X = \text{diag}(x)$, $S = \text{diag}(s)$ och e är en n-vektor med alla komponenter ett.

(a) Antag att $x(\mu)$, $y(\mu)$ och $s(\mu)$ löser det primal-duala ekvationssystemet för ett givet positivt μ samt att $x(\mu) > 0$ och $s(\mu) > 0$. Visa att $x(\mu)$ är tillåten till (P) samt $y(\mu), s(\mu)$ är tillåtna till (D) med dualitetsgap $n\mu$. .... (2p)

(b) Härled det linjära ekvationssystem som uppstår då det primal-duala ekvationssystemet ska lösas med Newtons metod. ....(2p)

(c) Hur hanteras de implicita kraven $x > 0$ och $s > 0$ i en Newton-baserad inrepunktsmetod som approximativt löser det primal-duala ekvationssystemet för avtagande värden på μ? .... (1p)

3. Betrakta det linjära heltalsprogrammeringsproblemet (IP) definierat av

$$
(IP)\qquad \begin{array}{ll}
\min & -6x_1 - 10x_2 - 11x_3 - 10x_4 \\
\text{då} & -x_1 - x_2 - x_3 \geq -2, \\
 & -x_2 - x_3 - x_4 \geq -2, \\
 & -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 \geq -9, \\
 & x \geq 0,\ x \text{ heltalig.}
\end{array}
$$

(a) Antag att de två första bivillkoren lagrangerelaxeras med multiplikatorer $u_1 = 1$ och $u_2 = 1$. Ställ upp det lagrangerelaxerade problemet. Bestäm en optimallösning till det lagrangerelaxerade problemet genom att utnyttja att kappsäcksproblemet

$$
\begin{array}{ll}
\max & 5x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 9x_4 \\
\text{då} & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 9, \\
 & x \geq 0,\ x \text{ heltalig,}
\end{array}
$$

har optimallösning $(0\ 1\ 1\ 0)^T$. ....(2p)

(b) Bestäm en subgradient till den duala målfunktionen som svarar mot lagrangerelaxeringen i uppgift (3a) i punkten $u = (1\ 1)^T$. Din subgradient har en speciell egenskap som gör att du kan bestämma en optimallösning till (IP). Vilken? Bestäm härur en optimallösning till (IP). ....(3p)

4. Betrakta ett transportproblem (TP) definierat enligt

$$
(TP)\qquad \begin{array}{ll}
\min & \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} \\
\text{då} & \displaystyle\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3, \\
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, 3, 4, \\
 & x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3, 4,
\end{array}
$$

där

$$
C = \begin{pmatrix} 25 & 17 & 17 & 23 \\ 25 & 18 & 14 & 20 \\ 22 & 19 & 17 & 21 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 13 \\ 24 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix}.
$$

En optimallösning är

$$\widehat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 12 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 9\frac{1}{2} & 14\frac{1}{2} \\ 13 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Att $\widehat{X}$ är optimal kan man visa genom att motsvarande duala problem har en tillåten lösning med samma målfunktionsvärde. (Det behöver du inte göra.)

(a) Bestäm, utgående från $\widehat{X}$, två heltaliga optimallösningar till (TP). ...... (3p)
Ledning: Det gäller att $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}u_{ij} = 0$, $\sum_{j=1}^{4} u_{ij} = 0$, $i = 1, 2, 3$, och $\sum_{i=1}^{3} u_{ij} = 0$, $j = 1, 2, 3, 4$, för

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Förklara varför man inte skulle få $\widehat{X}$ som svar om man använde simplexmetoden för att lösa (TP). .... (2p)

5. Betrakta ett cutting-stock problem med följande data:

$$W = 50, \quad m = 3, \quad w_1 = 7, \quad w_2 = 8, \quad w_3 = 10, \quad b = \begin{pmatrix} 90 & 85 & 70 \end{pmatrix}^T.$$

Beteckningarna och frågeställningen är i enlighet med läroboken. Givet är rullar av bredd W. Efterfrågat är rullar av m olika bredder. Rulle i har bredd w_i, $i = 1, \ldots, m$. Efterfrågan för rulle i är b_i rullar, $i = 1, \ldots, m$. Man vill skära W-rullarna så att minimalt antal W-rullar går åt.

Föreslaget är att använda skärmönstren $(0\ 0\ 5)^T$, $(0\ 5\ 1)^T$ och $(6\ 1\ 0)^T$.

(a) Betrakta det LP-relaxerade problemet som svarar mot ovanstående problem. Bestäm en baslösning som svarar mot de tre skärmönstren ovan. Visa att den baslösning du tagit fram är optimal till det LP-relaxerade problemet. Det subproblem som uppstår får lösas på valfritt sätt, som inte behöver vara systematiskt. .... (3p)
Ledning: Subproblemet kan lösas genom inspektion, då målfunktionens koefficienter blir en multipel av bivillkorets koefficienter.

(b) Utgående från den optimallösning till det LP-relaxerade problemet som du bestämt i uppgift (5a), bestäm en annan optimallösning till det LP-relaxerade problemet där tre rullar av skärmönster $(2\ 2\ 2)^T$ används. .... (2p)

Anmärkning: För dessa problemdata går det i båda fallen att avrunda den LP-relaxerade optimallösningen till en optimallösning till ursrpungsproblemet.

Lycka till!