KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem.
Lördagen den 24 augusti 2002 kl. 8.00–13.00.

Examinator: Anders Forsgren, tel 790 71 27

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, inget svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Antag att vi har ett linjärprogrammeringsproblem och ett tillhörande dualt problem. Kan dualitetsgapet vara positivt och ändligt? ....(1p)

(b) Antag att vi har ett linjärt heltalsprogrammeringsproblem och ett tillhörande lagrangedualt problem. Kan dualitetsgapet vara positivt och ändligt? ... (1p)

(c) Låt (P) och (D) beteckna ett primal-dualt par av linjärprogrammeringsproblem enligt

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (D) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0, \end{array}$$

där A har full radrang. Antag att (P) och (D) båda har tillåtna lösningar. Har då (P) garanterat en optimallösning som är en extrempunkt? .... (1p)

(d) Är det möjligt att $EVPI = 0$ för ett stokastiskt programmeringsproblem? (1p)

(e) Antag att vi har ett givet par av primalt respektive dualt linjärprogrammeringsproblem. Antag också att vi känner en optimallösning till dessa optimeringsproblem som uppfyller strikt komplementaritet. Gäller garanterat att barriärtrajektorian konvergerar mot denna lösning? .... (1p)

2. Man vill anpassa en linje $y = kx + l$ till ett antal givna punkter (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$. Speciellt ska k och l väljas så att summan av avvikelserna i y-led minimeras, dvs k

och l väljs enligt $\min_{k,l} \sum_{i=1}^{m} |kx_i + l - y_i|\}$. Genom att införa m extra variabler z_i, $i = 1, \ldots, m$, kan problemet skrivas som ett LP-problem på formen

$$
(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{m} z_i \\ \text{då} & -z_i \le kx_i + l - y_i \le z_i, \quad i = 1, \ldots, m, \end{array}
$$

där x_i, $i = 1, \ldots, m$ och y_i, $i = 1, \ldots, m$ är givna parametrar samt k, l och z_i, $i = 1, \ldots, m$, är variablerna. Vi antar att $m \ge 3$ samt $x_i \ne x_j$ då $i \ne j$.

(a) Bilda det duala problemet (DLP) som svarar mot (LP). .... (3p)

(b) Antag att du har löst problemet för ett antal punkter (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$. Antag nu att du vill lägga till ytterligare en eller några punkter (x_i, y_i) och lösa problemet igen. Hur skulle du gå tillväga för att lösa det modifierade problemet effektivt? .... (2p)

3. Givet ett linjärprogrammeringsproblem på formen

$$
\begin{array}{lll} \min & c^T x & \\ \text{då} & A_H x = b_H, & A_H \text{ är "komplicerande", dimension } m \times n, \\ & A_E x = b_E, & A_E \text{ är "lätt"}, \\ & x \ge 0. & \end{array}
$$

Antag att $\{x : A_E x = b_E, x \ge 0\}$ är begränsad med extrempunkter v_i, $i = 1, \ldots, k$. Antag vidare att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfe dekomposition.

Masterproblemet blir då

$$
\begin{array}{ll} \min & c^T V \alpha \\ \text{då} & A_H V \alpha = b_H, \\ & e^T \alpha = 1, \\ & \alpha \ge 0. \end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{k} c^T v_i \alpha_i \\ \text{då} & \sum_{i=1}^{k} A_H v_i \alpha_i = b_H, \\ & \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \\ & \alpha \ge 0. \end{array}
$$

Här betecknar e en k-dimnensionell vektor med alla komponenter ett, och $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{pmatrix}$.

Härled subproblemet som ett LP-problem. .... (5p)

4. Betrakta det linjära heltalsprogrammeringsproblemet (IP) definierat enligt

$$
(IP) \qquad \begin{array}{ll} \min & -4x_1 - 7x_2 - 3x_3 - x_4 \\ \text{då} & 2x_1 + 2x_2 \le 3, \\ & x_3 + x_4 \le 1, \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \ldots, 4. \end{array}
$$

(a) Genom att lagrangerelaxera olikhetsbivillkoren får man ett tillhörande dualt problem (D) på formen

$$(D) \qquad \begin{array}{ll} \max & \varphi(u) \\ \text{då} & u \geq 0, \quad u \in I\!R^2, \end{array}$$

Ange det minimeringsproblem som ger $\varphi(u)$. ....(2p)

(b) Bestäm två subgradienter till φ i punkten $(2 \;\; 2)^T$. ....(2p)

(c) Skriv om bivillkoret $2x_1+2x_2 \leq 3$ så att man får ett ekvivalent heltalsprogrammeringsproblem som kan lösas som ett linjärprogrammeringsproblem. ... (1p)

5. Betrakta LP-problemet (LP) definierat av

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \end{array}$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Den unika optimallösningen till (LP) är $x^* = (0 \;\; -1 \;\; 1)^T$.

Antag att bivillkoret $x_2 \geq 0$ läggs till (LP). Bestäm optimallösning till det nya problemet. Använd lämplig systematisk metod som utgår från optimallösningen till problemet ovan. ....(5p)

Anmärkning: För att få poäng på uppgiften måste du utgå från optimallösningen till problemet ovan.

Lycka till!