KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem.
Fredagen den 21 december 2001 kl. 14.00–19.00.

Examinator: Anders Forsgren, tel 790 71 27

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, utelämnat svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Är det möjligt att $VSS = 0$ för ett stokastiskt programmeringsproblem? (1p)

(b) Betrakta det linjära heltalsprogrammeringsproblemet

$$(IP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \ x \text{ heltalig.} \end{array}$$

Antag att (IP) löses med hjälp av trädsökning med LP-relaxering i noderna. Antag att det LP-relaxerade problemet i rotnoden har optimalvärde $\widehat{z}$. Kan då optimallösningen till heltalsprogrammeringsproblemet i någon nod bli mindre än $\widehat{z}$? .... (1p)

(c) Betrakta problemen (P) och (P') definierade enligt

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad (P') \quad \begin{array}{ll} \min & (c+e)^T x \\ \text{då} & Ax \leq b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

där e är en vektor med alla komponenter ett. Är då (P') garanterat en relaxering av (P)? .... (1p)

(d) Låt A vara en $m \times n$-matris med linjärt oberoende rader och låt b vara en m-dimensionell vektor. Låt $\widehat{x}$ vara en n-dimensionell ickenegativ vektor med exakt m (strikt) positiva komponenter. Är då $\widehat{x}$ garanterat en extrempunkt till $\{x \in I\!R^n : Ax = b, \ x \geq 0\}$? .... (1p)

(e) Låt (P) och (D) beteckna ett primal-dualt par av linjärprogrammeringsproblem enligt

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (D)\quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}$$

Antag att $\widetilde{y}$, $\widetilde{s}$ och $\widehat{y}$, $\widehat{s}$ är två optimala lösningar till (D) sådana att $\widetilde{s}_1 > 0$ och $\widehat{s}_1 = 0$. Antag vidare att $\bar{x}$ är en tillåten lösning till (P) sådan att $\bar{x}_1 > 0$. Kan $\bar{x}$ vara optimallösning till (P)? .... (1p)

2. Låt (P) och (D) definieras av

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (D)\quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}$$

(a) Antag att x är en tillåten lösning till (P) och att y, s är en tillåten lösning till (D). Visa att dualitetsgapet för dessa lösningar ges av $x^T s$ och motivera slutsatsen att vi har optimala lösningar till respektive problem om och endast om $x_j \cdot s_j = 0$ för alla j. .... (2p)

(Det får antas känt att om (P) har en optimallösning så har även (D) en optimallösning, och optimalvärdena är lika.)

(b) Visa att om det finns någon optimallösning till (P), så finns det minst en extrempunkt (tillåten baslösning) som är optimal. .... (3p)

(Exempelvis kan representationssatsen utnyttjas utan bevis.)

3. Betrakta heltalsprogrammeringsproblemet (IP) definierat enligt

$$(IP)\quad \begin{array}{ll} \min & -3x_1 - 5x_2 - 7x_3 - 8x_4 \\ \text{då} & -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \geq -3, \\ & -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \geq -8, \\ & x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,2,3,4. \end{array}$$

(a) Lagrangerelaxera bivillkoret $-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \geq -3$ i (IP) med en ickenegativ lagrangemultiplikator u. Ange det optimeringsproblem som ger den duala målfunktionen $\varphi(u)$ för ett fixt $u \geq 0$. .... (2p)

(b) Bestäm $\varphi(6)$ på valfritt sätt. Du kan utnyttja att problemet är litet. .... (1p)

(c) Bestäm ur svaret i uppgift (3b) en subgradient till φ i punkten $u = 6$. Avgör sedan med hjälp av subgradienten om $u^* \geq 6$ eller $u^* \leq 6$, där u^* betecknar en optimallösning till det duala problemet. .... (2p)

4. Betrakta LP-problemet (LP) definierat av

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & x_1 + 3x_2 \\ \text{då} & x_1 + x_2 = 3, \\ & x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{array}$$

Antag att vi vill lösa (LP) med en primal-dual inrepunktsmetod.

(a) Visa att det primal-duala ickelinjära ekvationssystemet för $\mu = 4$ har lösningen $x(4) = (2 \ \ 1)^T$, $y(4) = -1$ och $s(4) = (2 \ \ 4)^T$. .... (2p)

(b) Sätt $\mu = 0.4$ och beräkna nästa iterationspunkt i en primal-dual inrepunktsmetod utgående från punkten i uppgift (4a). Välj eventuella parametrar på lämpligt sätt. Du kan utnyttja att problemet är litet i de beräkningar som behövs. .... (3p)

5. Betrakta ett cutting-stock problem med följande data:

$$W = 48, \quad m = 3, \quad w_1 = 6, \quad w_2 = 7, \quad w_3 = 9, \quad b = \begin{pmatrix} 215 & 87 & 73 \end{pmatrix}^T.$$

Beteckningarna och frågeställningen är i enlighet med läroboken. Givet är rullar av bredd W. Efterfrågat är rullar av m olika bredder. Rulle i har bredd w_i, $i = 1, \ldots, m$. Efterfrågan för rulle i är b_i rullar, $i = 1, \ldots, m$. Man vill skära W-rullarna så att minimalt antal W-rullar går åt.

Föreslaget är att använda skärmönstren $(8 \ 0 \ 0)^T$, $(1 \ 6 \ 0)^T$ och $(2 \ 0 \ 4)^T$.

(a) Betrakta det LP-relaxerade problemet som svarar mot ovanstående problem. Bestäm en baslösning som svarar mot de tre skärmönstren ovan. Visa att den baslösning du tagit fram är optimal till det LP-relaxerade problemet. Det subproblem som uppstår får lösas på valfritt sätt, som inte behöver vara systematiskt. .... (3p)

(b) Bestäm en "nästan optimal" lösning till ursprungsproblemet genom lämplig avrundning av svaret från uppgift (5a). Avgör hur stor avvikelsen maximalt kan vara från optimalt målfunktionsvärde. .... (2p)

Lycka till!