KUNGL
TEKNISKA
HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem.
Tisdagen den 24 april 2001 kl. 8.00–13.00.

Examinator: Anders Forsgren, tel 790 71 27

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, utelämnat svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Låt A vara en $m \times n$-matris med linjärt oberoende rader. Gäller då garanterat att antalet nollskilda komponeneter i en tillåten baslösning till problemet

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

är exakt m? .... (1p)

(b) Betrakta de duala LP-problemen (LP) och (DLP) på formen

$$(LP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad\qquad (DLP) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}$$

Låt $\widehat{x}$ vara tillåten till (LP) och låt $\widehat{y}$, $\widehat{s}$ vara tillåtna till (DLP). Om $\widehat{s} = 0$, är då $\widehat{x}$ optimal till (LP)? .... (1p)

(c) Antag att man använder både simplexmetoden och en primal-dual inrepunktsmetod för att lösa

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 \\ \text{då} & x_1 + x_2 = 1, \\ & x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{array}$$

Kommer metoderna att ge samma optimallösning? .... (1p)

(d) Betrakta problemet

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \end{array}$$

där c är en n-vektor, b är en m-vektor och A är en $m \times n$-matris. Antag att (P) saknar tillåtna lösningar. Kommer då garanterat LP-dualen till (P) att ha obegränsat optimalvärde? .... (1p)

(e) Kan man välja matrisen A och vektorerna b och c så att

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \\ & x \text{ heltalig}, \end{array}$$

saknar tillåtna lösningar medan optimalvärdet till LP-relaxeringen av (P) är nedåt obegränsat? .... (1p)

2. Vid en tillämpning har en konsultfirma löst ett LP-problem på formen

$$\begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y \leq c. \end{array}$$

Numeriska värden ges av

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}^T.$$

Optimallösningen till problemet ges av $\widetilde{y} = (1 \;\; -3 \;\; 1)^T$.

Då konsultfirman tittar igenom modellen ser de till sin fasa att de av misstag gett felaktigt tecken på c_1. Rätt värde är $c_1 = -3$.

Man undrar nu om $\widetilde{y}$ är optimal till det korrekta problemet. Om inte, vill man bestämma optimallösning till det korrekta problemet på ett effektivt sätt, utgående från $\widetilde{y}$ och eventuell ytterligare information man kan få då det ursprungliga problemet lösts. Att lösa det korrekta problemet från början är inte möjligt, då man behöver svaret snabbt.

Hjälp konsultfirman med detta, det vill säga lös det korrekta problemet på ett effektivt sätt utgående från lösningen till det ursprungliga problemet. .... (5p)

Anmärkning: Vi tänker oss att problemet i verkligheten är mycket stort, så att frågeställningen ovan är relevant.

3. Betrakta ett binärt kappsäcksproblem (KP) definierat enligt

$$
(KP) \quad \begin{array}{ll} \min & -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{då} & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b, \\ & x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,\ldots,n, \end{array}
$$

där $a \ge 0$, $c \ge 0$ och $b \ge 0$.

(a) Bestäm en explicit form för målfunktionen $\varphi(\lambda)$ i det duala problem (D) som uppstår då bivillkoret $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b$ lagrangerelaxeras. ....(2p)

(b) Givet ett ickenegativt $\lambda \in I\!R$, bestäm på explicit form en subgradient till φ i λ. ....(1p)

(c) Antag speciellt att $n = 3$, $a = (3\ 4\ 5)^T$, $b = 8$ och $c = (5\ 6\ 7)^T$. Åskådliggör det duala problemet grafiskt. Bestäm ur figuren optimallösning och optimalt målfunktionsvärde till det duala problemet. ....(2p)

4. Betrakta det stokastiska programmeringsproblemet (P) givet av

$$
(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & T(\omega)x = h(\omega), \\ & x \ge 0, \end{array}
$$

där ω är en stokastisk variabel och $T(\omega)x = h(\omega)$ endast ska ses som ett "informellt" stokastiskt bivillkor. Antag att ω antar ett ändligt antal värden $\omega_1,\ldots,\omega_N$ med motsvarande sannolikheter $p_1,\ldots,p_N$. Låt T_i beteckna $T(\omega_i)$ och låt h_i beteckna $h(\omega_i)$.

(a) Förklara hur det deterministiskt ekvivalenta problemet

$$
\begin{array}{ll} \min & c^T x + \sum_{i=1}^{N} p_i q_i^T y_i \\ \text{då} & Ax = b, \\ & T_i x + W y_i = h_i, \quad i = 1,\ldots,N, \\ & x \ge 0, \\ & y_i \ge 0, \quad i = 1,\ldots,N, \end{array}
$$

uppstår. (Vi antar här för enkelhets skull "fix kompensation", d.v.s. att W inte beror av i.) ....(3p)

(b) Förklara vad *VSS* är i termer av lämpliga optimeringsproblem. ....(1p)

(c) Förklara vad *EVPI* är i termer av lämpliga optimeringsproblem. .... (1p)

5. Betrakta LP-problemet (LP) definierat av

$$
(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & 3x_1 + x_2 \\ \text{då} & 2x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ & x_1 - x_4 = 1, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4. \end{array}
$$

Antag att vi vill lösa (LP) med en primal-dual inrepunktsmetod. Antag vidare att vi initialt väljer $x = (2\ 2\ 2\ 1)^T$, $y = (0\ 0)^T$, $s = (3\ 1\ 1\ 1)^T$, samt $\mu = 1$. Här betecknar y och s de duala variablerna, i enlighet med bokens notation.

(a) Ställ upp det linjära ekvationssystem som behöver lösas i första iterationen av den primal-duala inrepunktsmetoden för de givna initialvärdena. Ställ upp den allmänna formen och sätt sedan in explicita numeriska värden i ekvationssystemet. .... (3p)

Anmärkning: Lösningen till det linjära ekvationssystemet ges av $\Delta x = (-1/7\ 1/7\ -1/7\ -1/7)^T$, $\Delta y = (4/7\ 8/7)^T$, och $\Delta s = (-16/7\ -4/7\ -3/7\ 1/7)^T$.

(b) Låt lösningen till det primal-duala ekvationssystemet för ett givet positivt μ betecknas med $x(\mu)$, $y(\mu)$ och $s(\mu)$. Ge en uppskattning till $x(1)$ baserat på svaret ovan. Bestäm också $\lim_{\mu \to 0} x(\mu)$ på valfritt sätt, exempelvis grafiskt. .... (2p)

Anmärkning: Du ska *inte* räkna ut $x(\mu)$.

Lycka till!