KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem.
Fredagen den 22 december 2000 kl. 14.00–19.00.

Examinator: Anders Forsgren, tel 790 71 27

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, utelämnat svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Betrakta ett binärt heltalsprogrammeringsproblem (IP) på formen

$$(IP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & x_j \in \{0,1\},\ j = 1,\dots,n, \end{array}$$

och dess tillhörande LP-relaxering

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & 0 \leq x_j \leq 1,\ j = 1,\dots,n. \end{array}$$

Antag att både (LP) och (IP) har ändliga optimalvärden. Gäller det då att optval$(LP) \leq$ optval(IP), där "optval" betecknar optimalvärdet till respektive problem? .... (1p)

(b) Betrakta de duala LP-problemen (LP) och (DLP) på formen

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad\qquad (DLP) \qquad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}$$

Låt $\widehat{x}$ vara optimal till (LP) och låt $\widehat{y}$, $\widehat{s}$ vara optimala till (DLP). Kan det då gälla att $\widehat{x}_j = 0$ och $\widehat{s}_j = 0$ för något j? .... (1p)

(c) Kan man välja matrisen A och vektorerna b och c så att problemet

$$(LP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

har optimalvärdet 0 och $A^T y \leq c$ saknar lösning? .... (1p)

(d) Betrakta problemet

$$(IP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \ x \text{ heltalig.} \end{array}$$

Är problemet

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \leq b, \end{array}$$

en relaxering av (IP)? .... (1p)

(e) Betrakta problemet

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & Cx \geq d, \\ & x \geq 0, \ x \text{ heltalig,} \end{array}$$

där $A \in I\!R^{m_1 \times n}$ och $C \in I\!R^{m_2 \times n}$. Får det duala problem som uppstår om bivillkoren $Ax \geq b$ lagrangerelaxeras m_1 variabler? .... (1p)

2. Givet ett LP-problem (LP_δ) definierat för en skalär δ,

$$(LP_\delta) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b + \delta e_2, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 4 & 13 & 11 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

(a) En optimal baslösning till (LP_0) ges av $x = (1 \ \ 2 \ \ 3 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0)^T$ med tillhörande simplexmultiplikatorer $y = (4 \ \ 5 \ \ 6)^T$ och reducerade kostnader $s = (0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 4 \ \ 5 \ \ 6)^T$. Bestäm ur denna information en underskattning till optimalvärdet till (LP_δ) som är på formen $\alpha + \beta\delta$. Underskattningen ska vara giltig för δ sådana att (LP_δ) har tillåtna lösningar, och den ska vara exakt då $\delta = 0$. Du ska alltså bestämma lämpliga värden på α och β. .... (3p)

(b) Bestäm gränser på δ inom vilka underskattningen är exakt. .... (2p)

3. Betrakta LP-problemet (P) definierat av

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

där A är en given $m \times n$-matris med linjärt oberoende rader. Visa att om det finns någon optimallösning till (P), så finns det minst en tillåten baslösning som är optimal. Visa också att $\{x : Ax = b, x \geq 0\}$ är en konvex mängd, och visa att x är en extrempunkt till $\{x : Ax = b, x \geq 0\}$ om och endast om x är en tillåten baslösning till $Ax = b, x \geq 0$. .... (5p)

4. Betrakta LP-problemet (LP) definierat av

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & x_1 + 2x_2 \\ \text{då} & x_1 + x_2 = 1, \\ & x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{array}$$

För en fix positiv barriärparameter μ, ställ upp det primal-duala ekvationssystemet som svarar mot detta problem. Utnyttja att problemet är litet och beräkna explicita uttryck för lösningen $x(\mu)$, $y(\mu)$ och $s(\mu)$ till ekvationssystemet. .... (5p)

5. Vid dimensionering av telekomnät kan man vilja ta hänsyn till så kallad *multicast-trafik*. Sådan trafik uppstår då en sändare ska skicka information till en given grupp mottagare. Detta kan matematiskt ses som ett problem för en given graf $G = (V, E)$, där V betecknar noderna och E betecknar kanterna. Varje kant e kan ges en kapacitetsnivå som kan väljas bland en uppsättning givna nivåer b_{le}, $l = 1, \ldots, L$, till kostnad c_{le}, $l = 1, \ldots, L$. Valet av nivå kan modelleras med en binär variabel z_{le}, där $z_{le} = 1$ svarar mot att nivå l väljs för kant e. Vi antar vidare att det finns K stycken multicast-behov. Behov k kräver kapacitet d_k, $k = 1, \ldots, K$. Sändandet av multicast-behov k kan beskrivas av binära variabler x_{ke}, $e \in E$, där $x_{ke} = 1$ om multicast-behov k skickas genom kant e, och $x_{ke} = 0$ annars. För ett fixt k ges tillåtna val av x_{ke}, $e \in E$, genom att låta $x_{ke} = 1$ för kanter som ger träd i grafen där sändarnoden och mottagarnoderna ingår. Om vi låter $x_{k\bullet} = \{x_{ke}\}, \forall e \in E$ och låter $\mathcal{X}_k$ beteckna mängden tillåtna distributionsträd för multicast-grupp k, kan vi skriva optimeringsproblemet som

$$\begin{array}{lll} \min & \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \sum_{e \in E} c_{le} z_{le} & \\ \text{då} & \displaystyle\sum_{l=1}^{L} z_{le} \leq 1, & e \in E, \\ & \displaystyle\sum_{k=1}^{K} d_k x_{ke} \leq \sum_{l=1}^{L} b_{le} z_{le}, & e \in E, \\ & z_{le} \in \{0, 1\}, & l = 1, 2, \ldots, L, \ e \in E, \\ & x_{k\bullet} \in \mathcal{X}_k, & k = 1, 2, \ldots, K. \end{array}$$

Antag att vi vill försöka få en underskattning till optimalvärdet för detta problem genom att lösa det duala problem som erhålls då bivillkoren

$$\sum_{k=1}^{K} d_k x_{ke} \leq \sum_{l=1}^{L} b_{le} z_{le}, \quad e \in E$$

lagrangerelaxeras. Genomför lagrangerelaxeringen och ställ upp, på så enkel form som möjligt, det (eller de) problem som behöver lösas då den duala målfunktionen ska evalueras. ....(5p)

Observera: Uppgiften kan lösas utan att man sätter sig in i problemformuleringen.

Lycka till!