KTH Matematik

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem
Tisdagen den 25 oktober 2005 kl. 14.00–19.00
Kortfattade lösningsförslag

---

1. (a) Nej.

(b) Ja.

(c) Nej.

(d) Ja.

(e) Nej.

2. Så länge det givna x är optimal ges optimalvärdet av $3 + 2c_3$, eftersom $x_3 = 2$. Låt $\widetilde{c} = c + c_4 e_3$, där $c = (1\ 2\ 0\ 3)^T$. Då blir $\widetilde{y} = y + c_3 B^{-T} e_3$. Om vi låter $\widetilde{v} = B^{-T} e_3 = (0\,0\,1)^T$ får vi $\widetilde{y} = y + c_3 \widetilde{v}$ och $\widetilde{s}_N = s_N - c_3 \widetilde{v}^T N$. Insättning $\widetilde{s}_4 = 2 - 3c_3$. För $c_3 \le 2/3$ är alltså det givna x optimalt och optimalvärdet ges av $3 + 2c_3$.

3. (Se kursmaterialet.)

4. (a) Det duala problemet ges av

$$(D_1) \quad \begin{array}{ll} \max & \varphi_1(u) \\ \text{då} & u \ge 0, \end{array}$$

där

$$\varphi_1(u) = -u_1 - u_2 - \begin{array}{l} \max (2-u_1)x_1 + (3-u_1)x_2 + (4-u_2)x_3 + (5-u_2)x_4 \\ \text{då} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 8, \\ \qquad\ x_j \ge 0, \quad x_j \text{ heltalig}, \quad j = 1,2,3,4. \end{array}$$

Speciellt för $\bar{u} = (2\ 4)^T$ får vi

$$\varphi_1(\bar{u}) = -6 - \begin{array}{l} \max x_2 + x_4 \\ \text{då} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 8, \\ \qquad\ x_j \ge 0, \quad x_j \text{ heltalig}, \quad j = 1,2,3,4. \end{array}$$

Vi får optimallösningen $x(\bar{u}) = (0\ 4\ 0\ 0)^T$. Det duala målfunktionsvärdet blir -10. En subgradient ges av

$$\begin{pmatrix} x_1(\bar{u}) + x_2(\bar{u}) - 1 \\ x_3(\bar{u}) + x_4(\bar{u}) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Det duala problemet ges av

$$(D_2) \quad \begin{array}{ll} \max & \varphi_2(u) \\ \text{då} & u \geq 0, \end{array}$$

där

$$\varphi_2(u) = -u_1 - u_2 - \quad \begin{array}{ll} \max & (2-u_1)x_1 + (3-u_1)x_2 + (4-u_2)x_3 + (5-u_2)x_4 \\ \text{då} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 8, \\ & x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,2,3,4. \end{array}$$

Speciellt för $\bar{u} = (2\ 4)^T$ får vi

$$\varphi_2(\bar{u}) = -6 - \quad \begin{array}{ll} \max & x_2 + x_4 \\ \text{då} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 8, \\ & x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,2,3,4. \end{array}$$

En optimallösning är $x(\bar{u}) = (0\ 1\ 0\ 1)^T$. Det duala målfunktionsvärdet blir -8. En subgradient ges av

$$\begin{pmatrix} x_1(\bar{u}) + x_2(\bar{u}) - 1 \\ x_3(\bar{u}) + x_4(\bar{u}) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) Det duala problemet som svarar mot (IP_2) ger alltid minst lika bra underskattning till optimalvärdet som det duala problemet som svarar mot (IP_1). Då vi hittat en subgradient som är noll i $\bar{u}$ svarande mot (D_2) har vi faktiskt löst (IP_2).

(För detta lilla problem kan man se att bivillkoret $-x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 \geq -8$ är redundant i (IP_1) och (IP_2). Om detta bivillkor stryks ger LP-relaxeringen optimallösningen, $x = (0\ 1\ 0\ 1)^T$. Alltså har båda dualproblemen optimalvärde -8.)

5. Vi studerar först det LP-relaxerade problemet. Baslösningen ges av

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \\ 70 \end{pmatrix}.$$

Vi får $x_1 = 35/24$, $x_2 = 40/3$ och $x_3 = 35/2$, vilket ger en tillåten baslösning tillsammans med alla övriga variabler noll. Målfunktionsvärdet är 775/24.

Simplexmultiplikatorerna ges av

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi får $y_1 = 1/8$, $y_2 = 7/48$ och $y_3 = 3/16$.

Då $y \geq 0$ ska ingen slackvariabel in i basen. Subproblemet blir

$$
\begin{array}{lll}
1 - & \frac{1}{48}\max & 6a_1 + 7a_2 + 9a_3 \\
 & \text{då} & 6a_1 + 7a_2 + 9a_3 \leq 48, \\
 & & a_i \geq 0, \ \text{heltaliga}, \quad i = 1, 2, 3.
\end{array}
$$

Då målfunktionen i kappsäcksproblemet är en multipel av bivillkoret, ser vi att subproblemets optimalvärde är noll. De tre givna skärmönstren ger optimalvärdet noll.

Därmed finns inga negativa reducerade kostnader, och den föreslagna lösningen ovan är optimal till det LP-relaxerade problemet.

Om vi avrundar uppåt får vi en tillåten lösning till heltalsproblemet, $x_1 = 2$, $x_2 = 14$ och $x_3 = 18$, övriga variabler noll. Detta ger 34 rullar. Genom avrundning uppåt från LP-problemets optimalvärde vet vi att en undre gräns är 33 rullar. En enkel heuristik med avrundning nedåt av en rulle i taget ger inget, varför vi nöjer oss med detta svar, $x_1 = 2$, $x_2 = 14$ och $x_3 = 18$. Vår lösning är max 1 rulle från optimal.