KTH Matematik

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem
Måndagen den 18 oktober 2004 kl. 14.00–19.00
Kortfattade lösningsförslag

---

1. (a) Nej.
(b) Ja.
(c) Ja.
(d) Ja.
(e) Ja.

2. (a) Då endast ickebasvariablernas kostnad ändras får vi

$$s_\delta = s_0 + \delta \widetilde{c} = \begin{pmatrix} 0 & 1-\delta & 3-\delta & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Kravet $s_\delta \geq 0$ ger $\delta_{\max} = 1$.

(b) För $\delta = \delta_{\max}$ blir reducerade kostnaden för x_2 noll, varför x_2 kan tas in i basen utan att målfunktionsvärdet ändras.
Vi får

$$p_B = -B^{-1}A_2 = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Maximal steglängd ges av kravet $x_B + \alpha p_B \geq 0$, dvs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

vilket ger $\alpha_{\max} = 1$. Då har vi en ny optimal baslösning $\widetilde{x} = (2\ 1\ 0\ 0)^T$. Vi kan skapa en tredje optimallösning som en konvexkombination av de två optimala baslösningarna, exempelvis

$$\tfrac{1}{2}x_0 + \tfrac{1}{2}\widetilde{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

3. (Se kursmaterialet.)

4. (a) Maximalt steg $\alpha_{\max}$ så att $x + \alpha_{\max}\Delta x \geq 0$ och $s + \alpha_{\max}\Delta s \geq 0$ ges av $\alpha_{\max} = 2$. Vi kan därmed välja $\alpha = 1$, vilket ger

$$\begin{aligned} x &\leftarrow x + \alpha \Delta x = (3/2 \ \ 1/2)^T, \\ y &\leftarrow y + \alpha \Delta y = 3/2, \\ s &\leftarrow s + \alpha \Delta s = (1/2\ 3/2)^T. \end{aligned}$$

Då vi tar enhetssteget kommer de linjära likhetsbivillkoren att vara uppfyllda och därmed blir den nya punkten både primalt och dualt tillåten.

(b) Vi kan låta $\mu = (x^T s)/n$ för den nya punkten dvs $\mu = 3/4$, samt välja $\sigma = 0.1$. Det innebär att vi vill ta ett Newtonsteg mot att lösa

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ A^T y + s &= c, \\ XSe &= \sigma\mu e, \end{aligned}$$

där $A = (1 \;\; 1)$, $b = 2$, $c = (2 \;\; 3)^T$, $X = \operatorname{diag}(x)$, $S = \operatorname{diag}(s)$ och $e = (1 \;\; 1)^T$. Det linjära ekvationssystemet blir

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Ax - b \\ A^T y + s - c \\ XSe - \sigma\mu e \end{pmatrix}.$$

Insättning av numeriska värden ger

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta y \\ \Delta s_1 \\ \Delta s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{27}{40} \\ -\frac{27}{40} \end{pmatrix}.$$

5. (a) Betrakta ett olikhetsbivillkor på formen $a^T x \le b$. Om $x_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, \ldots, n$, får vi $a_j x_j \le \max\{a_j, 0\}$. Vi kan därför säga att bivillkoret är redundant om

$$\sum_{j=1}^{n} \max\{a_j, 0\} \le b.$$

Detta villkor är uppfyllt för $x_1 + x_2 \le 2$ och $x_3 + x_4 \le 2$.

(b) Lagrangerelaxering ger

$$\begin{aligned} \varphi(u) = \quad & \min \quad -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 - u(-4x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 7x_4 + 11) \\ & \text{då} \quad -x_1 - x_2 \ge -2, \\ & \qquad\;\; -x_3 - x_4 \ge 2, \\ & \qquad\;\; x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \ldots, 4. \end{aligned}$$

Bivillkoren $-x_1 - x_2 \ge -2$ och $-x_3 - x_4 \ge -2$ är fortfarande redundanta, varför vi kan skriva

$$\begin{aligned} \varphi(u) = -11u + \quad & \min \quad (4u - 3)x_1 + (5u - 4)x_2 + (6u - 5)x_3 + (7u - 6)x_4 \\ & \text{då} \quad x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \ldots, 4. \end{aligned}$$

Här kan vi minimera över varje x_j för sig, vilket ger

$$\varphi(u) = -11u + \min\{4u - 3, 0\} + \min\{5u - 4, 0\} + \min\{6u - 5, 0\} + \min\{7u - 6, 0\}.$$

Vi ser att optimallösning blir $u^* = 5/6$ med $x^1(u^*) = (0\ 0\ 1\ 1)^T$ eller $x^2(u^*) = (0\ 0\ 0\ 1)^T$. Insättning i det relaxerade bivillkoret ger subgradienter

$$\begin{aligned} s^1 &= -11 + 4x_1^1(u^*) + 5x_2^1(u^*) + 6x_3^1(u^*) + 7x_4^1(u^*) = 2, \quad \text{respektive} \\ s^2 &= -11 + 4x_1^2(u^*) + 5x_2^2(u^*) + 6x_3^2(u^*) + 7x_4^2(u^*) = -4. \end{aligned}$$