KTH Matematik

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem
Lördagen den 28 augusti 2004 kl. 8.00–13.00
Kortfattade lösningsförslag

---

1. (a) Ja.
(b) Nej.
(c) Ja.
(d) Ja.
(e) Nej.

2. Optimalitetsvillkoren till (P_μ) och (D_μ) ges av det primal-duala ickelinjära ekvationssystemet

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ A^T y + s &= c, \\ XSe &= \mu e, \end{aligned}$$

där $X = \operatorname{diag}(x)$, $S = \operatorname{diag}(s)$ och $e = (1\ 1\ \ \dots 1)^T$, samt $x > 0$ och $s > 0$. För enkelhet i notation låter vi x beteckna $x(4)$, y beteckna $y(4)$ och s beteckna $s(4)$. Första blocket ekvationer är uppfyllt för det givna x. Insättning av det givna y i det andra blocket ekvationer ger

$$s = c - A^T y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Insättning i tredje blocket ger

$$XSe = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \mu e,$$

vilket stämmer. Eftersom dessutom $x > 0$ och $s > 0$ har vi uppfyllt optimalitetsvillkoren. Alltså är de föreslagna $x(4)$ och $y(4)$ korrekta.

3. (Se kursmaterialet.)

4. (a) För $\widetilde{u} = 10/7$ får vi

$$\begin{array}{rll} \varphi(u) = \frac{10}{7} + & \min & \frac{4}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 - \frac{5}{7}x_3 - \frac{5}{7}x_4 \\ & \text{då} & x_1 + x_2 \le 1, \\ & & x_3 + x_4 \le 1, \\ & & x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,\dots,4. \end{array}$$

Det är här optimalt att välja $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, samt antingen $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ eller $x_3 = 0$, $x_4 = 1$. Detta är precis x^1 och x^2. Om vi skriver det relaxerade bivillkoret på formen $Ax = b$, med

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad b = 1,$$

får vi subgradienter $s^1 = b - Ax^1 = 4$ respektive $s^2 = b - Ax^2 = -3$.

(b) Vi ser att $\widetilde{u}$ är optimal till (D), eftersom vi har en positiv och en negativ subgradient. Med $c^T x^* = 2$ och $\varphi(\widetilde{u}) = 5/7$ blir dualitetsgapet $9/7$.

5. Om vi utgår från extrempunkterna $x^1 = (0\ 0\ 0\ 1)^T$ och $x^2 = (1\ 0\ 1\ 0)^T$ blir första basmatrisen

$$B = \begin{pmatrix} A_H x^1 & A_H x^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Basvariablernas värden ges av

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{dvs} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Simplexmultiplikatorerna ges av

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^T x^1 \\ c^T x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \text{dvs} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Minsta reducerade kostnaden ges av $-y_2 + \min_{x \in S}(c - A_H^T y_1)^T x$. Vi får

$$c^T - y_1 A_H = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Inspektion ger att optimal extrempunkt till subproblemet blir $x^3 = (0\ 0\ 1\ 0)^T$, med reducerad kostnad $-y_2 + (c - A_H^T y_1)^T x^3 = -2/3 < 0$. Ny transformerad kolumn i bivillkorsmatrisen ges av

$$B^{-1} \begin{pmatrix} A_H x^3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix}.$$

Kvottest ger att α_2 lämnar basen, vilket ger

$$B = \begin{pmatrix} A_H x^1 & A_H x^3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Basvariablernas värden ges av

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{dvs} \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

Simplexmultiplikatorerna ges av

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \text{dvs} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{7} \\ -\frac{5}{7} \end{pmatrix}.$$

Minsta reducerade kostnaden ges av $-y_2 + \min_{x \in S}(c - A_H^T y_1)^T x$. Vi får

$$c^T - y_1 A_H = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix}.$$

Inspektion ger att optimal extrempunkt till subproblemet blir x^1 eller x^3, vilka båda ger minsta reducerade kostnaden noll. Alltså är problemet löst. Optimallösningen x^* ges av

$$x^* = \alpha_1 x^1 + \alpha_3 x^3 = \frac{4}{7} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{7} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}.$$

Anmärkning: Problem (LP) i uppgift 5 är LP-relaxeringen av problem (IP) i tal 4. Då lagrangerelaxeringen i uppgift 4 har heltalsegenskapen, kommer den relaxeringen inte att bli starkare än LP-relaxeringen. Optimalvärdena för lagrangerelaxeringen och LP-relaxeringen är alltså identiska, 5/7.