KTH Matematik

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem
Torsdagen den 15 april 2004 kl. 8.00–13.00
Kortfattade lösningsförslag

1.
(a) Ja.
(b) Ja.
(c) Nej.
(d) Ja.
(e) Nej.

2. Optimalitetsvillkoren till (P_μ) ges av det primal-duala ickelinjära ekvationssystemet

$$
\begin{aligned}
Ax &= b, \\
A^T y + s &= c, \\
XSe &= \mu e,
\end{aligned}
$$

där $X = \text{diag}(x)$, $S = \text{diag}(s)$ och $e = (1\ 1\ \ldots 1)^T$, samt $x > 0$ och $s > 0$. För enkelhet i notation låter vi x beteckna $x(6)$, y beteckna $y(6)$ och s beteckna $s(6)$. Första blocket ekvationer är uppfyllt för det givna x. Insättning av $\mu = 6$ tillsammans med det givna x i det tredje blocket ger

$$
s = \mu X^{-1} e = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.
$$

Insättning i andra blocket ger att det måste finnas y så att $A^T y = c - s$, dvs

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Vi får lösning för} \quad y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Eftersom dessutom $x > 0$ och $s > 0$ har vi uppfyllt optimalitetsvillkoren. Alltså är den föreslagna lösningen optimal till (P_6).

3. (a) Vi ser att $\widetilde{x}$ har de tre första komponenterna positiva. De aktiva bivillkoren i $\widetilde{x}$ blir därför

$$
\begin{pmatrix} A \\ e_4^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{där} \quad e_4^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Om vi nu tar en nollskild vektor p och positiva skalärer β_1 och β_2 följer att $\widetilde{x}$ ligger mellan x^1 och x^2, där $x^1 = \widetilde{x} - \beta_1 p$ och $x^2 = \widetilde{x} + \beta_2 p$. Eftersom $\widetilde{x}$ då ligger mellan x^1 och x^2 kan $\widetilde{x}$ skrivas som en konvexkombination av x^1 och x^2. Vi har $x^1 = \widetilde{x} - \beta_1 p$ och $x^2 = \widetilde{x} + \beta_2 p$, vilket ger

$$x^1 = \widetilde{x} - \beta_1 p = \widetilde{x} - \frac{\beta_1}{\beta_2}(x^2 - \widetilde{x}) = \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2}\widetilde{x} - \frac{\beta_1}{\beta_2}x^2.$$

Alltså får vi

$$\widetilde{x} = \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}x^1 + \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}x^2.$$

Om x^1 och x^2 är tillåtna måste gälla att

$$\begin{pmatrix} A \\ e_4^T \end{pmatrix} p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{dvs} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

eftersom $\widetilde{x}$ är en konvexkombination av x^1 och x^2. Vi ser att $p_4 = 0$ och kan sedan exempelvis välja $p_1 = 1$, vilket ger

$$p = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Då blir $\widetilde{x} + \eta p \geq 0$ för $-1/2 \leq \eta \leq 2$. De begränsande fallen $\eta = -1/2$ respektive $\eta = 2$ ger tillåtna lösningar med två positiva komponenter,

$$x^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{respektive} \quad x^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De delmatriser ur A som svarar mot positiva komponenter i dessa lösningar är båda ickesingulära, varför de båda är baslösningar.

Vi har $x^1 = \widetilde{x} - (1/2)p$ och $x^2 = \widetilde{x} + 2p$, varför vi med $\beta_1 = 1/2$ och $\beta_2 = 2$ får

$$\widetilde{x} = \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}x^1 + \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}x^2 = \frac{4}{5}x^1 + \frac{1}{5}x^2,$$

med x^1 och x^2 givna ovan.

(b) Då $\widetilde{x}$ är en konvexkombination av x^1 och x^2 får vi $\widetilde{x}$ optimal om och endast om x^1 och x^2 båda är optimala.

För att kontrollera optimalitet av x^1 beräknar vi simplexmultiplikatorer y ur

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{vilket ger} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Reducerade kostnaderna ges nu av

$$s = c - A^T y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Då $s \geq 0$ följer att x^1 blir optimal. Då $s_1 = 0$ och $s_3 = 0$ följer att även x^2 är optimal. Alltså är $\widetilde{x}$ optimal.

4. (Se kursmaterialet.)

5. Vi antar att vi har generat k kolumner och löst masterproblemet

$$(LP_k) \qquad \begin{array}{ll} \min & \displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_j \\ \text{då} & \displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j \geq 1, \ i = 1, \ldots, m, \\ & x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, k. \end{array}$$

Simplexmultiplikatorerna svarande mot $\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j \geq 1$ betecknar vi y_i, $i = 1, \ldots, m$. Dessa är kända då (LP_k) lösts. Multiplikatorerna svarande mot $x_j \geq 0$ i (LP) ges då av

$$1 - \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij}.$$

Kraven på flygmönstren ger nu att ett flygmönster a är en binär vektor i $\mathbb{R}^m$ sådan att $\sum_{i=1}^{m} t_i a_i \leq T$ samt $\sum_{i=1}^{m} a_i \leq N$. Subproblemet blir därför

$$(SUB) \qquad \begin{array}{ll} \max & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i a_i \\ \text{då} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_i a_i \leq T, \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i \leq N, \\ & a_i \in \{0, 1\}, \ i = 1, \ldots, m. \end{array}$$

Om optimalvärdet till (SUB) är ett har vi löst (LP), annars kan vi generera ny kolumn. Subproblemet är ett binärt heltalsprogrammeringsproblem, ett binärt kappsäcksproblem med ytterligare ett komplicerande bivillkor.