KTH Matematik

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem
Fredagen den 19 december 2003 kl. 14.00–19.00
Kortfattade lösningsförslag

1.
(a) Nej.
(b) Ja.
(c) Ja.
(d) Ja.
(e) Nej.

2. Om $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ kan endast x_4 och x_5 vara nollskilda. Om x_4 och x_5 väljs till basvariabler får vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Detta ger

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{b_2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tillåtenhet ger kravet $-2 \le b_2 \le 2$.

För att kontrollera optimalitet beräknar vi simplexmultiplikatorer y ur

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{vilket ger} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Reducerade kostnaderna ges nu av

$$s = c - A^T y = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Då $s \ge 0$ följer att baslösningen blir optimal. Alltså har vi optimallösning med $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ for $-2 \le b_2 \le 2$.

3. (Se kursmaterialet.)

4. (a) Lagrangerelaxering för $\widehat{u} = (1\ 3)^T$ ger

$$\begin{array}{lll} \varphi(\widehat{u}) = -8 + \min & -6x_1 - 4x_2 - 6x_3 \\ \text{då} & -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 \geq -9, \\ & x \geq 0,\ x \text{ heltalig.} \end{array}$$

Optimallösningen är $x(\widehat{u}) = (3\ 0\ 0)^T$. Insättning av optimallösningen $x(\widehat{u})$ i de relaxerade bivillkoren ger en subgradient, $\widehat{s}$, till φ i $\widehat{u}$ enligt

$$\widehat{s} = \begin{pmatrix} -2 + x_1(\widehat{u}) + x_2(\widehat{u}) \\ -2 + x_2(\widehat{u}) + x_3(\widehat{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Från definitionen av subgradient har vi

$$\varphi(\bar{u}) \leq \varphi(\widehat{u}) + \widehat{s}^T(\bar{u} - \widehat{u}).$$

Insättning av numeriska värden ger $\varphi(\bar{u}) \leq \varphi(\widehat{u}) - 5 < \varphi(\widehat{u})$. Därmed kan inte $\bar{u}$ vara optimal till (D).

5. Vi kan lösa problemet med hjälp av dekomposition. Med de givna extrempunkterna x^1, x^2 och x^3 blir basmatrisen

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Basvariablernas värden ges av

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{dvs} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{20} \\ \frac{3}{10} \\ \frac{3}{20} \end{pmatrix}.$$

(Med hjälp av Ledning II.) Simplexmultiplikatorerna ges av

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{dvs} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

(Återigen med hjälp av Ledning II.) Minsta reducerade kostnaden ges av $-y_3 + \min_{x \in S}(c - A_H^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix})^T x$. Vi får

$$c^T - (y_1\ y_2)A_H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Inspektion ger att optimal extrempunkt till subproblemet blir alla extrempunkter med $x_2 = -1$, vilka ger minsta reducerade kostnaden noll. Alltså har vi en optimallösning till ursprungsproblemet. Denna optimallösning x^* ges av

$$x^* = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = \frac{11}{20}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{20}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ -1 \\ -\frac{7}{10} \\ -\frac{4}{10} \end{pmatrix}.$$