KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem.
Lördagen den 30 augusti 2003 kl. 8.00–13.00.

Kortfattade lösningsförslag.

1. (a) Nej.
(b) Ja.
(c) Ja.
(d) Ja.
(e) Nej.

2. Insättninge ger att x^* är en tillåten lösning. Basvariablerna svarande mot x^* är x_2 och x_4. Simplexmultiplikatorerna ges av

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{dvs} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2c_2 - 1}{5} \\ \dfrac{-c_2 - 2}{5} \end{pmatrix}.$$

Reducerade kostnaderna för ickebasvariablerna blir

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2c_2 - 1}{5} \\ \dfrac{-c_2 - 2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2c_2 + 4}{5} \\ \dfrac{3c_2 + 1}{5} \end{pmatrix}.$$

Kravet $s \geq 0$ ger $c_2 \geq -1/3$.

3. (Se kursmaterialet.)

4. (a) Den duala målfunktionen $\varphi(u)$ ges av det lagrangerelaxerade problemet

$$\begin{array}{rll} \varphi(u) = -8u + & \min & (2u-3)x_1 + (3u-5)x_2 + (4u-7)x_3 + (5u-8)x_4 \\ & \text{då} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3, \\ & & x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, \ldots, 4. \end{array}$$

(b) Speciellt för $u = 8/5$ får vi

$$\begin{array}{rll} \varphi(u) = -\frac{64}{5} + & \min & \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2 - \frac{3}{5}x_3 \\ & \text{då} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3, \\ & & x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, \ldots, 4. \end{array}$$

Optimallösningar är $x^1(u) = (0\ 1\ 1\ 0)^T$ och $x^2(u) = (0\ 1\ 1\ 1)^T$. Vi får $\varphi(u) = -68/5$.

(Motsvarande subgradienter blir -1 respektive 4, varför $u = \frac{8}{5}$ är optimallösning till det duala problemet.)

(c) Det lagrangerelaxerade problemet har heltalsegenskapen, eftersom alla extrempunkter till det lagrangerelaxerade problemet är heltaliga.

5. Om vi utgår från extrempunkterna $x^1 = (\text{-}1\ 0\ \text{-}1\ 0)^T$ och $x^2 = (0\ 1\ 0\ 1)^T$ blir första basmatrisen

$$B = \begin{pmatrix} A_H x^1 & A_H x^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Basvariablernas värden ges av

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{dvs} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Simplexmultiplikatorerna ges av

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \text{dvs} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{34}{5} \end{pmatrix}.$$

Minsta reducerade kostnaden ges av $-y_2 + \min_{x \in S}(c - A_H^T y_1)^T x$. Vi får

$$c^T - y_1 A_H = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} & -\frac{13}{5} & \frac{23}{5} & -\frac{21}{5} \end{pmatrix}.$$

Inspektion ger att optimal extrempunkt till subproblemet blir $x^3 = (0\ 1\ \text{-}1\ 0)^T$, med reducerad kostnad $-y_2 + (c - A_H^T y_1)^T x^3 = -2/5 < 0$. Ny transformerad kolumn i bivillkorsmatrisen ges av

$$B^{-1}\begin{pmatrix} A_H x^3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix}.$$

Kvottest ger att α_1 lämnar basen, vilket ger

$$B = \begin{pmatrix} A_H x^2 & A_H x^3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Basvariablernas värden ges av

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{dvs} \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}.$$

Simplexmultiplikatorerna ges av

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \text{dvs} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ -\frac{50}{7} \end{pmatrix}.$$

Minsta reducerade kostnaden ges av $-y_2 + \min_{x \in S}(c - A_H^T y_1)^T x$. Vi får

$$c^T - y_1 A_H = \begin{pmatrix} \frac{15}{7} & -\frac{19}{7} & \frac{31}{7} & -\frac{31}{7} \end{pmatrix}.$$

Inspektion ger att optimal extrempunkt till subproblemet blir x^2 eller x^3, vilka båda ger minsta reducerade kostnaden noll. Alltså är problemet löst. Optimallösningen x^* ges av

$$x^* = \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{6}{7} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{6}{7} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$