KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem.
Fredagen den 2 maj 2003 kl. 8.00–13.00.

Kortfattade lösningsförslag.

1. (a) Ja.

(b) Nej.

(c) Ja.

(d) Nej.

(e) Nej.

2. (Se kursmaterialet.)

3. (a) Lagrangerelaxering för $u = (1\ 1)^T$ ger

$$\begin{array}{ll} \min & -5x_1 - 8x_2 - 9x_3 - 9x_4 \\ \text{då} & -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 \geq -9, \\ & x \geq 0,\ x \text{ heltalig.} \end{array}$$

Detta problem är ekvivalent med det givna kappsäcksproblemet. Optimallösningen är $x(1) = (0\ 1\ 1\ 0)^T$.

(b) Insättning av optimallösningen $x(1)$ i de relaxerade bivillkoren ger en subgradient enligt

$$\begin{pmatrix} -2 + x_1(1) + x_2(1) + x_3(1) \\ -2 + x_2(1) + x_3(1) + x_4(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Att subgradienten är noll implicerar att $u = (1\ 1)^T$ är optimal till det duala problemet. Dessutom medför det att $x(1)$ är tillåten till (IP) samt att primalt och dualt målfunktionsvärde är lika för $x(1)$ respektive $u = (1\ 1)^T$. Därmed är $x(1)$ optimal till (IP).

4. (a) Det givna U har egenskapen att $\widehat{X} + \theta U$ är optimal för $\theta \in I\!R$ så länge $\widehat{x}_{ij} + \theta u_{ij} \geq 0$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3, 4$. Speciellt är $u_{ij} = 0$ för i, j sådana att $x_{ij} = 0$. Därför kan θ varieras i ett intervall kring noll så att tillåtenhet bibehålls.

Minimalt värde på θ är $-\frac{1}{2}$ och maximalt värde är $\frac{1}{2}$. Detta svarar mot två optimallösningar

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 15 \\ 13 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 14 \\ 13 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

vilka båda är heltaliga.

(b) Eftersom vi har ett transportproblem med heltaliga koefficienter i a och b, blir extrempunkterna heltaliga. Därmed är $\widehat{X}$ inte en extrempunkt. (Alternativt har vi i uppgift (4a) visat att $\widehat{X} = \frac{1}{2}X^* + \frac{1}{2}\bar{X}$, där $X^* \neq \widehat{X}$ och $\bar{X} \neq \widehat{X}$, varför $\widehat{X}$ inte är en extrempunkt.) Eftersom simplexmetoden ger extrempunkter som svar, kan den därmed inte $\widehat{X}$ som svar.

5. (a) Baslösningen ges av

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 85 \\ 70 \end{pmatrix}.$$

Vi får $x_1 = 11.2$, $x_2 = 14$ och $x_3 = 15$, vilket ger en tillåten baslösning tillsammans med alla övriga variabler noll.

Simplexmultiplikatorerna ges av

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi får $y_1 = 0.14$, $y_2 = 0.16$ och $y_3 = 0.20$.

Då $y \geq 0$ ska ingen slackvariabel in i basen. Subproblemet blir

$$\begin{array}{lll} 1 - & \max & 0.14a_1 + 0.16a_2 + 0.20a_3 \\ & \text{då} & 7a_1 + 8a_2 + 10a_3 \leq 50, \\ & & a_i \geq 0,\ \text{heltaliga}, \quad i = 1, 2, 3. \end{array}$$

Då målfunktionen i kappsäcksproblemet är en multipel av bivillkoret, ser vi att subproblemets optimalvärde inte är mindre är noll. De tre givna skärmönstren ger optimalvärdet noll.

Därmed finns inga negativa reducerade kostnader, och den föreslagna lösningen ovan är optimal till det LP-relaxerade problemet. (Avrundning uppåt ger i detta fall optimallösning till heltalsproblemet, då vi får närmsta större heltal i målfunktionsvärde, dvs $x_1 = 12$, $x_2 = 14$ och $x_3 = 15$, övriga variabler noll.)

(b) Vi ser att mönster $(2\ 2\ 2)^T$ ger målfunktionsvärde noll i subproblemet. Om vi låter skärmönster $(2\ 2\ 2)^T$ var mönster nummer fyra innebär det att vi kan öka x_4 från noll i lösningen från (5a) utan att målfunktionsvärdet i det LP-relaxerade problemet ändras. Om vi ändrar x_4 från noll till p_4, ger kravet på tillåtenhet en förändring av basvariablerna, p_1, p_2 och p_3, enligt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} p_4,$$

dvs $p_1 = p_2 = p_3 = -p_4/3$. Speciellt söker vi lösningen för $p_4 = 3$, vilket adderat till baslösningen från (5a) ger $x_1 = 10.2$, $x_2 = 13$ och $x_3 = 14$, $x_4 = 3$, övriga variabler noll. (Vi kan avrunda uppåt på samma sätt för att hitta optimallösning till ursprungsproblemet, dvs $x_1 = 11$, $x_2 = 13$ och $x_3 = 14$, $x_4 = 3$, övriga variabler noll.)