KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem.
Tisdagen den 9 april 2002 kl. 8.00–13.00.

Kortfattade lösningsförslag.

1. (a) Ja.
(b) Nej.
(c) Nej.
(d) Ja.
(e) Ja.

2. (a) Eftersom $x + \Delta x > 0$ och $s + \Delta s > 0$ tar vi förslagsvis enhetssteget och sätter

$$x \leftarrow x + \Delta x = (\frac{1}{2} \;\; 3 \;\; \frac{3}{2})^T, \; y \leftarrow y + \Delta y = (-\frac{5}{2} \;\; \frac{3}{2})^T, \; s \leftarrow s + \Delta s = (\frac{7}{2} \;\; 1 \;\; \frac{5}{2})^T.$$

Med enhetssteget kommer vi att uppfylla de linjära likhetsbivillkoren och därmed blir den nya punkten primalt respektive dualt tillåten.

(b) Den nya punkten är tillåten med dualitetsgap $x^T s = 17/2$. Vi kan låta $\mu = x^T s/n = 17/6$ och exempelvis sikta mot en reduktion av dualitetsgapet med en faktor $\sigma = 0.1$, vilket innebär att vi vill ta ett Newtonsteg mot att lösa

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ A^T y + s &= c, \\ XSe &= \sigma\mu e, \end{aligned}$$

där $e = (1\;1\;\ldots 1)^T$. Med $X = \operatorname{diag}(x)$ och $S = \operatorname{diag}(s)$ blir det linjära ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Ax - b \\ A^T y + s - c \\ XSe - \sigma\mu e \end{pmatrix}.$$

Insättning av numeriska värden ger

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{7}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta s_1 \\ \Delta s_2 \\ \Delta s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{22}{15} \\ -\frac{163}{60} \\ -\frac{52}{15} \end{pmatrix}.$$

3. (a) Vi kan skriva om problemet som

$$
(LP) \quad \begin{array}{ll} \min & z \\ \text{då} & x_i k + l + z \geq y_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ & -x_i k - l + z \geq -y_i, \quad i = 1, \ldots, m. \end{array}
$$

Om vi inför dualvariabler u_i svarande mot bivillkor $x_i k + l + z \geq y_i$ och dualvariabler v_i svarande mot bivillkor $-x_i k - l + z \geq -y_i$ kan det duala problemet skrivas som

$$
(DLP) \quad \begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^m y_i (u_i - v_i) \\ \text{då} & \sum_{i=1}^m x_i (u_i - v_i) = 0, \\ & \sum_{i=1}^m (u_i - v_i) = 0, \\ & \sum_{i=1}^m (u_i + v_i) = 1, \\ & u \geq 0, \\ & v \geq 0. \end{array}
$$

(b) Problemet (DLP) är på standardform (om man byter till minimering) med tre likhetsbivillkor. Kolumnerna i bivillkorsmatrisen har formen $(x_i \ 1 \ 1)^T$ och $(-x_i \ -1 \ 1)^T$ för $i = 1, \ldots, m$. Bivillkorsmatrisen har full radrang. För att se detta, ansätt $\alpha x_i + \beta + \gamma = 0$ och $-\alpha x_i - \beta + \gamma = 0$ för $i = 1, \ldots, m$. Om vi adderar dessa uttryck får vi $\gamma = 0$. Men då måste $\alpha = \beta = 0$ om $m \geq 2$ och $x_i \neq x_j$ för $j \neq i$. Därmed är raderna linjärt oberoende.

Då (LP) är tillåtet med optimalvärde som är större eller lika med noll är (DLP) tillåtet med ändligt optimalvärde. Alltså har (DLP) en optimal tillåten baslösning. Om optimalvärdet är noll har alla punkter avvikelse noll, och därmed gäller påståendet om $m \geq 3$. Om optimalvärdet är positivt kan, för varje i i varje optimal baslösning till (DLP) högst en av u_i och v_i vara basvariabel. Om både u_i och v_i är basvariabler måste de båda ha reducerad kostnad noll, dvs $x_i k + l + z = y_i$ och $-x_i k - l + z = -y_i$ för simplexmultiplikatorer k, l och z. Men dessa båda relationer kan bara gälla om $z = 0$, vilket vi har antagit inte gäller, eftersom simplexmultiplikatorer i (DLP) motsvarar tillåtna lösningar till (LP). Alltså finns det tre olika i som svarar mot basvariabler i (DLP) där motsvarande reducerad kostnader är noll. Att den reducerade kostnaden är noll medför att $x_i k + l + z = y_i$ eller $-x_i k - l + z = -y_i$, beroende på om det är u_i eller v_i som är basvariabel. Sammantaget ger dessa relationer att $|x_i k + l - y_i| = z$ för minst tre olika i, vilket är vad vi skulle visa.

(c) Använd förslagsvis simplexmetoden för att lösa (DLP) som svarar mot ursprungsproblemet. Basmatrisen får då endast dimension tre, oberoende av m. Om vi sedan lägger till någon eller några kolumner löser vi det modifierade problemet (DLP) med simplexmetoden genom att utgå från den tillåtna baslösning som vi fått då vi löst ursprungsproblemet. Den lösningen är ju tillåten till det modifierade problemet.

4. (Se kursmaterialet.)

5. (a) Om vi inför ickenegativa multiplikatorer u_i, $i = 1, \ldots, m$, får vi det lagrangerelaxerade problemet

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{i=1}^{m} p_i z_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} u_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - a_i z_i \right) \\
\text{då} \quad & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, \dots, n, \\
& z_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, m, \\
& x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \; j = 1, \dots, n.
\end{aligned}
$$

Problemet sönderfaller. För varje z_i får vi problemet $\min(p_i - u_i a_i) z_i$ då $z_i \in \{0, 1\}$, vilket löses omedelbart. För x_{ij}-variablerna får vi n st problem, där problem j tar formen

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{i=1}^{m} (c_{ij} + u_i) x_{ij} \\
\text{då} \quad & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, \\
& x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.
\end{aligned}
$$

Även detta problem löses omedelbart, låt $x_{ij} = b_j$ för ett i med minimalt $c_{ij} + u_i$.

(b) Om vi inför ickenegativa multiplikatorer v_j, $j = 1, \dots, n$, får vi det lagrangerelaxerade problemet

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{i=1}^{m} p_i z_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} v_j \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - b_j \right) \\
\text{då} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - a_i z_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\
& z_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, m, \\
& x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \; j = 1, \dots, n.
\end{aligned}
$$

Detta sönderfaller i m stycken problem, där problem i tar formen

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & p_i z_i + \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} - v_j) x_{ij} \\
\text{då} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - a_i z_i \leq 0, \\
& z_i \in \{0, 1\}, \\
& x_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.
\end{aligned}
$$

Vi kan lösa detta genom att titta på två fall, $z_i = 0$ och $z_i = 1$. Om $z_i = 0$ blir $x_{ij} = 0$ för alla j. Låt $k = \operatorname{argmin}_{j=1,\dots,n}\{c_{ij} - v_j\}$. Om $z_i = 1$, låt $x_{ik} = 0$ om $c_{ik} - v_k \geq 0$ och låt $x_{ik} = a_i$ annars. Låt $x_{ij} = 0$ för $j \neq k$. Välj sedan lösningen som svarar mot $z_i = 0$ eller $z_i = 1$ beroende på om $p_k + (c_{ik} - v_k) a_i$ är positivt eller inte.

(c) Om man tittar på de lösningar som angetts till subproblemen för de båda relaxeringarna ser man att det inte spelar någon roll om vi kräver heltalighet eller inte i de båda subproblemen. Därmed ger båda de motsvarande duala problemen samma underskattning till optimalvärdet som LP-relaxeringen.