KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem.
Fredagen den 21 december 2001 kl. 14.00–19.00.

Kortfattade lösningsförslag.

1. (a) Ja.
(b) Nej.
(c) Nej.
(d) Nej.
(e) Nej.

2. (Se kursmaterialet.)

3. (a) För $u \geq 0$ får vi

$$\begin{aligned} \varphi(u) = -3u + \min \quad & (u-3)x_1 + (u-5)x_2 + (u-7)x_3 + (u-8)x_4 \\ \text{då} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 8, \\ & x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,2,3,4. \end{aligned}$$

(b) Speciellt då $u = 6$,

$$\begin{aligned} \varphi(6) = -18 + \min \quad & 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \\ \text{då} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 8, \\ & x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,2,3,4. \end{aligned}$$

Vi ser att $x(6) = (0\ 0\ 0\ 1)^T$. Vi måste ha $x_1 = x_2 = 0$ då de tar plats i kappsäcksbivillkorer och har positiva koefficienter i målfunktionen. Dessutom kan endast en av x_3 och x_4 kan väljas till 1, och x_4 är mer lönsam. Därmed blir $\varphi(6) = -20$.

(c) En subgradient till φ i $u = 6$ ges av det relaxerade bivillkoret med ombytt tecken evaluerat i optimalpunkten enligt

$$x_1(6) + x_2(6) + x_3(6) + x_4(6) - 3 = -2.$$

En subgradient till φ i $u = 6$ är alltså -2. Detta innebär att

$$\varphi(u) \leq \varphi(6) - 2(u-6),$$

dvs $\varphi(u) < \varphi(6)$ om $u > 6$. Det måste alltså gälla att $u^* \leq 6$.

4. (a) Med $X = \operatorname{diag}(x)$ och $S = \operatorname{diag}(s)$ blir det primal-duala ickelinjära ekvationssystemet

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ A^T y + s &= c, \\ XSe &= \mu e, \end{aligned}$$

där $e = (1\ 1\ \ldots 1)^T$. Insättning av numeriska värden ger

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3, \\ y + s_1 &= 1, \\ y + s_2 &= 3, \\ x_1 s_1 &= 4, \\ x_2 s_2 &= 4. \end{aligned}$$

Insättning av de föreslagna värdena visar att ekvationerna är uppfyllda.

(b) Med $X = \operatorname{diag}(x)$ och $S = \operatorname{diag}(s)$ blir det linjära ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Ax - b \\ A^T y + s - c \\ XSe - \mu e \end{pmatrix}.$$

Insättning av numeriska värden ger

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta y \\ \Delta s_1 \\ \Delta s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3.6 \\ -3.6 \end{pmatrix}.$$

De tre första ekvationerna ger $\Delta x_2 = -\Delta x_1$, $\Delta s_1 = \Delta s_2 = -\Delta y$. Insättning i de två sista ekvationerna ger

$$\begin{aligned} 2\Delta x_1 + 2\Delta s_1 &= -3.6, \\ -4\Delta x_1 + \Delta s_1 &= -3.6, \end{aligned}$$

ur vilket vi får $\Delta x_1 = 0.36$ och $\Delta s_1 = -2.16$. Därmed får vi

$$\Delta x = \begin{pmatrix} 0.36 \\ -0.36 \end{pmatrix}, \quad \Delta y = 2.16, \quad \text{och} \quad \Delta s = \begin{pmatrix} -2.16 \\ -2.16 \end{pmatrix}.$$

Maximal steglängd $\alpha_{\max}$ ges av $x + \alpha\Delta x \geq 0$ och $s + \alpha\Delta s \geq 0$, dvs

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0.36 \\ -0.36 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2.16 \\ -2.16 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Härur får vi $\alpha_{\max} = 25/27$. Eftersom $\alpha_{\max} < 1$ kan enhetssteget inte tas. Vi kan exempelvis sätta $\alpha = 0.999 \cdot \alpha_{\max}$, vilket ger $\alpha = 0.925$. Därmed får vi nästa iterationspunkt enligt

$$\begin{aligned} x + \alpha\Delta x &= \begin{pmatrix} 2.333 & 0.667 \end{pmatrix}^T, \\ y + \alpha\Delta y &= 0.998, \\ s + \alpha\Delta s &= \begin{pmatrix} 0.002 & 2.002 \end{pmatrix}^T. \end{aligned}$$

(Genom att fortsätta Newtoniterationerna får man $x(0.4) \approx (2.8133\ 0.1867)^T$, $y(0.4) \approx 0.8578$ och $s(0.4) \approx (0.1422\ 2.1422)^T$.)

5. (a) Baslösningen ges av

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 215 \\ 87 \\ 73 \end{pmatrix}.$$

Vi får $x_1 = 20\frac{1}{2}$, $x_2 = 14\frac{1}{2}$ och $x_3 = 18\frac{1}{4}$, vilket ger en tillåten baslösning tillsammans med alla övriga variabler noll.

Simplexmultiplikatorerna ges av

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi får $y_1 = 6/48 = 1/8$, $y_2 = 7/48$ och $y_3 = 9/48 = 3/16$.

Då $y \geq 0$ ska ingen slackvariabel in i basen. Subproblemet blir

$$\begin{array}{lll} 1 - & \max & \frac{6}{48}a_1 + \frac{7}{48}a_2 + \frac{9}{48}a_3 \\ & \text{då} & 6a_1 + 7a_2 + 9a_3 \leq 48, \\ & & a_i \geq 0, \ \text{heltaliga}, \quad i = 1, 2, 3. \end{array}$$

Då målfunktionen i kappsäcksproblemet är en multipel av bivillkoret, ser vi att subproblemets optimalvärde inte är mindre är noll. De tre givna skärmönstren ger optimalvärdet noll.

Därmed finns inga negativa reducerade kostnader, och den föreslagna lösningen ovan är optimal till det LP-relaxerade problemet.

(b) Den föreslagna LP-relaxerade lösningen har målfunktionsvärde $53\frac{1}{4}$. Eftersom ursprungsproblemet har heltaligt optimalvärde måste det därför gå åt minst 54 rullar. Om vi avrundar lösningen ovan uppåt, vilket ger tillåtenhet, får vi $\widehat{x}_1 = 21$, $\widehat{x}_2 = 15$ och $\widehat{x}_3 = 19$, vilket ger 55 rullar. Om vi alltså skär 21 st rullar enligt mönster $(8\ 0\ 0)^T$, 15 st rullar enligt mönster $(1\ 6\ 0)^T$ och 19 st rullar enligt mönster $(2\ 0\ 4)^T$ får vi en lösning som maximalt är en rulle från att vara optimal.

(Optimallösningen är 54 rullar, vilket ges av 21 st rullar enligt mönster $(8\ 0\ 0)^T$, 14 st rullar enligt mönster $(1\ 6\ 0)^T$, 18 st rullar enligt mönster $(2\ 0\ 4)^T$ och 1 st rulle enligt mönster $(0\ 3\ 3)^T$.)