KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem.
Tisdagen den 24 april 2001 kl. 8.00–13.00.

Kortfattade lösningsförslag.

1. (a) Nej.
(b) Ja.
(c) Nej.
(d) Nej.
(e) Ja.

2. Ursprungsproblemet är på dual form. Till ursprungsproblemets simplexmultiplikatorer $\widetilde{y}$ svarar reducerade kostnader $\widetilde{s}$ vilka ges av $\widetilde{s} = (4\ 0\ 1\ 0\ 0)^T$. Om c_1 nu ändras från 3 till -3 ändras s_1 från 4 till -2. Därmed är $\widetilde{y}$ inte tillåten till det korrekta problemet. Ändring av kostnadsvektorn påverkar inte primal tillåtenhet. Det är därför lämpligt att bestämma $\widetilde{x}$, som är optimallösningen till primala problemet som svarar mot ursprungsproblemet, och använda simplexmetoden på det primala korrekta problemet utgående från denna lösning.

Ur komplementär slack får vi $\widetilde{x}_1 = \widetilde{x}_3 = 0$. Vi får därmed basmatrisen B ur kolumnerna två, fyra och fem ur A, om dessa är linjärt oberoende. Detta ger

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

vilket är en inverterbar matris. Vi kan räkna ut $\widetilde{x}_2$, $\widetilde{x}_4$ och $\widetilde{x}_5$ ur

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x}_2 \\ \widetilde{x}_4 \\ \widetilde{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

vilket ger $\widetilde{x}_2 = \widehat{b}_1 = 1$, $\widetilde{x}_4 = \widehat{b}_2 = 2$ och $\widetilde{x}_5 = \widehat{b}_3 = 1$.

Vi kan nu lösa det korrekta problemet. Eftersom $s_1 = -2 < 0$, låter vi x_1 gå in i basen. Basvariablernas värden ändras enligt $\widehat{A}_1$, där $B\widehat{A}_1 = A_1$, dvs

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{a}_{11} \\ \widehat{a}_{21} \\ \widehat{a}_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

vilket ger $\widehat{a}_{11} = -4$, $\widehat{a}_{21} = 3$ and $\widehat{a}_{31} = 2$. Jämförande av kvoter $\widehat{b}_i/\widehat{a}_{i1}$, $i = 1, 2, 3$, ger minsta kvoten $\frac{1}{2}$ för $i = 3$. Därmed lämnar x_5 basen, och nya basvariabler blir x_2, x_4 och x_1. Deras värden ges av

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Simplexmultiplikatorerna ges av

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

vilket har lösning $y = (1\ \ -3\ \ 0)^T$. Reducerade kostnaderna ges av

$$s = c - A^T y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Eftersom $s \geq 0$ så har vi hittat en optimallösning. Optimalt y till det korrekta problemet ges alltså av

$$y = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

3. (a) Vi får

$$\varphi(\lambda) = -\lambda b + \sum_{j=1}^{n} \min_{x_j \in \{0,1\}} (a_j\lambda - c_j)x_j = -\lambda b - \sum_{j=1}^{n} \max(c_j - \lambda a_j, 0).$$

(b) Om man så vill kan $\varphi(\lambda)$ skrivas som

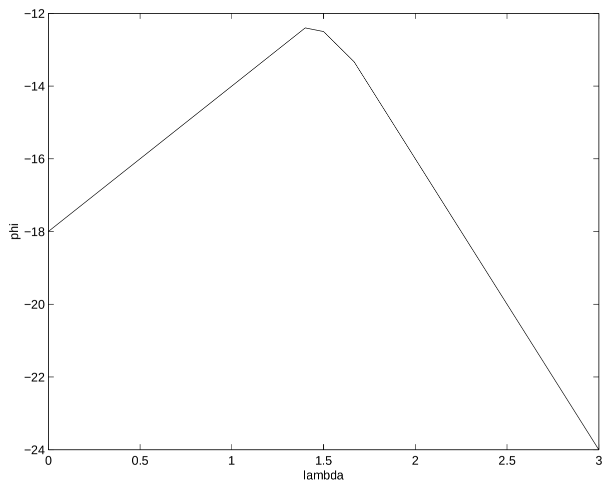
$$\varphi(\lambda) = -\lambda b - \sum_{j:a_j\lambda<c_j} (c_j - \lambda a_j) = -\sum_{j:a_j\lambda<c_j} c_j + (\sum_{j:a_j\lambda<c_j} a_j - b)\lambda.$$

En subgradient ges därmed av

$$-b + \sum_{j:a_j\lambda<c_j} a_j.$$

(Om $a_j\lambda \neq c_j$ för alla j är det också en gradient).

(c) Det duala problemet kan åskådliggöras enligt följande:



Man ser att optimallösningen till (D) ges av $\lambda^* = 1.4$ med $\varphi(\lambda^*) = -12.4$.
(Genom inspektion ser man att optimallösning till (KP) ges av $x^* = (1\ 0\ 1)^T$ med $c^T x^* = -12$. Dualitetsgapet är därmed 0.4.)

4. (Se kursmaterialet.)

5. (a) Med $X = \mathrm{diag}(x)$ och $S = \mathrm{diag}(s)$ blir det linjära ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Ax - b \\ A^T y + s - c \\ XSe - \mu e \end{pmatrix}.$$

Insättning av numeriska värden ger

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \\ \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta s_1 \\ \Delta s_2 \\ \Delta s_3 \\ \Delta s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -5 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) En approximation av $x(1)$ ges av $x + \Delta x$ för de givna x och Δx, vilket ger

$$x(1) \approx x + \Delta x = \begin{pmatrix} 13/7 & 15/7 & 13/7 & 6/7 \end{pmatrix}^T.$$

Det är rimligt att välja steglängden ett, eftersom $x + \Delta x > 0$ och $s + \Delta s > 0$. Vi har att $\lim_{\mu \to 0} x(\mu)$ är optimallösningen, vilket i detta fall är $x^* = (1\ 2)^T$, tillsammans med $y^* = (1\ 1)^T$ och $s^* = (0\ 0\ 1\ 1)^T$.
(Genom att fortsätta Newtoniterationerna får man $x(1) \approx (1.7609\ 2.2673\ 1.7891\ 0.7609)^T$, varför approximationen ovan är ganska bra.)