KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem.
Fredagen den 22 december 2000 kl. 14.00–19.00.

Kortfattade lösningsförslag.

---

1. (a) Ja.
(b) Ja.
(c) Nej.
(d) Ja.
(e) Ja.

2. (a) Dualen (DLP_δ) till (LP_δ) kan skrivas som

$$(DLP_\delta) \qquad \begin{array}{ll} \max & (b+\delta e_2)^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0, \end{array}$$

De givna y och s är tillåtna till detta problem, varför insättning av det givna y ger en underskattning av optimalvärdet enligt $63 + 5\delta$. Underskattningen är exakt så länge de givna y och s är optimala till (DLP_δ).

(b) Optimalitet av de givna y och s svarar mot att motsvarande basvariabler är ickenegativa. Detta ger $x_B = B^{-1}(b + \delta e_2) \geq 0$. Insättning ger

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

det vill säga $-2 \leq \delta \leq \frac{1}{2}$. Inom detta intervall är alltså underskattningen exakt.

3. (Se kursmaterialet.)

4. Det primal-duala ekvationssystemet blir för vårt exempel

$$x_1 + x_2 = 1, \tag{1a}$$
$$y + s_1 = 1, \tag{1b}$$
$$y + s_2 = 2, \tag{1c}$$
$$x_1 s_1 = \mu, \tag{1d}$$
$$x_2 s_2 = \mu. \tag{1e}$$

där vi dessutom implicit kräver $x > 0$ och $s > 0$. Exempelvis kan vi ur (1b)–(1e) uttrycka x_1, x_2, y och s_2 som funktion av s_1 enligt

$$x_1 = \frac{\mu}{s_1},\ x_2 = \frac{\mu}{1+s_1},\ y = 1 - s_1,\ s_2 = 1 + s_1.$$

Insättning i (1a) ger $\frac{\mu}{s_1} + \frac{\mu}{1+s_1} = 1$ eller ekvivalent $s_1^2 + (1-2\mu)s_1 - \mu = 0$. Den positiva roten till denna andragradsekvation ges av

$$s_1 = -\frac{1}{2} + \mu + \sqrt{(\frac{1}{2} - \mu)^2 + \mu} = -\frac{1}{2} + \mu + \sqrt{\frac{1}{4} + \mu^2}.$$

Därmed kan vi, efter förenkling, uttrycka lösningen som

$$x(\mu) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \mu + \sqrt{\frac{1}{4} + \mu^2} \\ \frac{1}{2} + \mu - \sqrt{\frac{1}{4} + \mu^2} \end{pmatrix}, y(\mu) = \frac{3}{2} - \mu - \sqrt{\frac{1}{4} + \mu^2}, s(\mu) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \mu + \sqrt{\frac{1}{4} + \mu^2} \\ \frac{1}{2} + \mu + \sqrt{\frac{1}{4} + \mu^2} \end{pmatrix}.$$

(Som rimlighetskontroll kan man räkna ut $\lim_{\mu\to 0} x(\mu) = (1\ \ 0)^T$, $\lim_{\mu\to 0} y(\mu) = 1$ och $\lim_{\mu\to 0} s(\mu) = (0\ \ 1)^T$, vilket är optimallösningar till respektive primala och duala problem.)

5. Lagrangerelaxering med ickenegativa lagrangemultiplikatorer λ_e, $e \in E$, ger

$$\begin{array}{rlll} \varphi(\lambda) = \min & \sum_{l=1}^{L} \sum_{e\in E} c_{le} z_{le} + \sum_{e\in E} \lambda_e (\sum_{k=1}^{k} d_k x_{ke} - \sum_{l=1}^{L} b_{le} z_{le}) & & \\ \text{då} & \sum_{l=1}^{L} z_{le} \le 1, & e \in E, & \\ & z_{le} \in \{0,1\}, & l = 1,2,\dots,L,\ e \in E, & \\ & x_{k\bullet} \in \mathcal{X}_k, & k = 1,2,\dots,K. & \end{array}$$

Detta problem sönderfaller. Vi kan skriva

$$\varphi(\lambda) = \sum_{e\in E} \varphi_e(\lambda_e) + \sum_{k=1}^{K} \varphi_k(\lambda).$$

För varje e ges $\varphi_e(\lambda_e)$ av att z_{le}, $l = 1,\dots,L$, bestäms ur

$$\begin{array}{rll} \varphi_e(\lambda_e) = \min & \sum_{l=1}^{L} (c_{le} - \lambda_e b_{le}) z_{le} & \\ \text{då} & \sum_{l=1}^{L} z_{le} \le 1, & \\ & z_{le} \in \{0,1\}, & l = 1,2,\dots,L. \end{array}$$

Detta problem löses genom inspektion, genom att välja $z_{le} = 1$ för det l som har minst målfunktionskoefficient, såvida inte alla målfuktionskoefficienter är positiva, i vilket fall $z_{le} = 0$ för alla l.

För varje multicast-behov k ges $\varphi_k(\lambda)$ av att x_{ke}, $e \in E$, bestäms ur

$$\begin{array}{rl} \varphi_k(\lambda) = \min & \sum_{e\in E} d_k \lambda_e x_{ke} \\ \text{då} & x_{k\bullet} \in \mathcal{X}_k. \end{array}$$

Detta är ett så kallat Steinerträdsproblem, för vilket man kan ta till speciella metoder.