KTH Matematik

Tentamen i 5B1762 Optimeringslära för T.
Torsdag 24 maj 2007 kl. 8.00–13.00

Examinator: Krister Svanberg, tel. 790 71 37

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Bonus: Den som har minst 5 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över uppgift 1(a). Den som har minst 9 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 25 poäng. 23–24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

1. (a) I denna uppgift är $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Bestäm en bas till vart och ett av de fyra fundamentala underrummen till $\mathbf{A}$, dvs till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ och $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$. .... (5p)

(b) Ett företag använder råvarorna $R_1, \ldots, R_m$ för att blanda till produkterna $P_1, \ldots, P_n$. För varje kg av produkt P_j åtgår a_{ij} kg av råvara R_i. Företaget kan köpa in R_i till priset b_i kr/kg och sälja P_j till priset c_j kr/kg. Marknads- och lagerbegränsningar gör att man inte vill blanda till mer än högst d_j kg per vecka av P_j och inte köpa in mer än högst e_i kg per vecka av R_i. Ovan är a_{ij}, b_i, c_j, d_j och e_i givna konstanter för $i = 1, \ldots, m$ och $j = 1, \ldots, n$.

Frågan är nu hur många kg av respektive produkt som skall blandas till per vecka för att företagets "vinst", här definierad som försäljningsintäkter minus inköpskostnader, skall maximeras.

Din uppgift är att *formulera* detta som ett LP-problem!
Ange noggrant vad dina variabler och bivillkor står för. .... (5p)

2. Denna uppgift handlar om ett 3-dimensionellt fackverk med 5 noder och 4 stänger, men man behöver faktiskt inte kunna något om fackverk för att lösa uppgiften!

De fem nodernas koordinater (i x-, y- och z-led) ges i tur och ordning av:
(–1, 0, 0), (0, –1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) och (0, 0, 1).
De fyra stängerna förbinder noderna enligt följande:
Stång 1 går mellan noderna 1 och 5, stång 2 går mellan noderna 2 och 5,
stång 3 går mellan noderna 3 och 5, och stång 4 går mellan noderna 4 och 5.
Noderna 1–4 är samtliga "fixerade" (fastskruvade i berg) medan nod 5 är "fri".

I nod 5 (den fria noden) appliceras nu en given yttre kraft $\mathbf{p} = (p_x,\, p_y,\, p_z)^\mathsf{T}$. Detta förorsakar normalkrafter $f_1,\ f_2,\ f_3$ och f_4 i de fyra stängerna, där $f_j > 0$ betyder drag medan $f_j < 0$ betyder tryck. Uppgiften går ut på att bestämma dessa normalkrafter genom att lösa ett visst optimeringsproblem.

Vi får följande tre villkor för kraftjämvikt i den icke-fixerade noden (dvs nod 5):

$$\begin{array}{ccccccccccl} f_1/\sqrt{2} & & & - & f_3/\sqrt{2} & & & = & p_x & & \text{(kraftjämvikt i x-led)}, \\ & & f_2/\sqrt{2} & & & - & f_4/\sqrt{2} & = & p_y & & \text{(kraftjämvikt i y-led)}, \\ f_1/\sqrt{2} & + & f_2/\sqrt{2} & + & f_3/\sqrt{2} & + & f_4/\sqrt{2} & = & p_z & & \text{(kraftjämvikt i z-led)}. \end{array}$$

Bland alla vektorer $\mathbf{f} = (f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4)^\mathsf{T}$ som uppfyller dessa jämviktsvillkor så väljer naturen den vektor $\hat{\mathbf{f}}$ som minimerar den kvadratiska funktionen

$$\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{4} c_j f_j^2 \quad (= \text{totala töjningsarbetet}),$$

där konstanterna c_j ges av $c_j = L_j/(A_j E)$. Här är $A_j = j$:te stångens tvärsnittsarea, $L_j = j$:te stångens längd, $E =$ materialets elasticitetsmodul.

(a) Antag att det för vårt fackverk gäller att $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 10^{-3}$, och att man applicerar lastvektorn $\mathbf{p} = (3,\, 2,\, 8)^\mathsf{T}$. Din uppgift är att bestämma den optimala lösningen $\hat{\mathbf{f}}$ till ovanstående kvadratiska optimeringsproblem med linjära bivillkor, och sålunda bestämma normalkrafterna i stängerna. ....(8p)

(b) Antag fortfarande att $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 10^{-3}$. Visa att för varje lastvektor $\mathbf{p} = (p_x,\, p_y,\, p_z)^\mathsf{T}$ så uppfyller den motsvarande optimala lösningen $\hat{\mathbf{f}}$ till ovanstående problem alltid att $\hat{f}_1 - \hat{f}_2 + \hat{f}_3 - \hat{f}_4 = 0$. ....(2p)

3. Betrakta följande LP-problem:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl} \text{minimera} & -30x_1 & + & 40x_2 & - & 20x_3 & + & 50x_4 & & \\ \text{då} & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & \leq & 8, \\ & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \leq & 4, \\ & x_1 & & & & & & & \geq & 0, \\ & & & x_2 & & & & & \geq & 0, \\ & & & & & x_3 & & & \geq & 0, \\ & & & & & & & x_4 & \geq & 0. \end{array}$$

(a) Överför problemet till standardform med hjälp av två slackvariabler x_5 och x_6. Använd sedan simplexmetoden för att lösa problemet. Starta med nyssnämnda slackvariabler som basvariabler. ....(4p)

(b) Antag att målfunktionskoefficienten framför x_4 ändras från 50 till 20. Använd simplexmetoden på detta modifierade problem. Det är tillåtet att starta i slutlösningen från (a)-uppgiften. Kommentera vad som händer. ....(3p)

(c) Formulera det duala LP-problemet svarande mot problemet på standardform (med 6 variabler) från (a)-uppgiften. Åskådliggör det tillåtna området till detta duala problem i en figur med dualvariablerna y_1 och y_2 på axlarna. .....(2p)

(d) Hur ser motsvarande figur ut för det duala LP-problemet svarande mot problemet på standardform från (b)-uppgiften? Kommentera figuren. ....(1p)

4. Följande kvadratiska optimeringsproblem har tre variabler och tre linjära olikhetsbivillkor:

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \tfrac{1}{2}(x_1+x_2)^2 + \tfrac{1}{2}(x_2+x_3)^2 + \tfrac{1}{2}(x_3+x_1)^2 - 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ \text{då} \quad & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Problemet kan skrivas på formen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}. \end{aligned}$$

(a) Ange vad $\mathbf{H}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{A}$ och $\mathbf{b}$ är i detta fall, och lös sedan problemet med den iterativa metod som ingår i kursen för denna typ av kvadratisk optimering under linjära olikhetsbivillkor.
Du måste starta i punkten $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. .... (8p)

(b) Bestäm en vektor $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^3$ som tillsammans med din i (a)-uppgiften erhållna optimallösning $\hat{\mathbf{x}}$ uppfyller optimalitetsvillkoren för problemet. .... (2p)

5. I följande optimeringsproblem med ickelinjära olikhetsbivillkor är talet c_1 (som multiplicerar variabeln x_1 i målfunktionen) en konstant.

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & c_1x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ \text{då} \quad & x_1^2 + x_2^2 \leq 2, \\ & x_1^2 + x_3^2 \leq 2, \\ & x_2^2 + x_3^2 \leq 2. \end{aligned}$$

(a) Avgör om det är ett konvext optimeringsproblem eller ej.
Motivera svaret ordentligt. .... (1p)

(b) Ställ upp KKT-villkoren för problemet. .... (1p)

(c) Finns det något eller några värden på konstanten c_1 som gör att punkten $\mathbf{x} = (1.4,\, 0.2,\, 0.2)^\mathsf{T}$ är en optimal lösning till problemet?
Bestäm i såfall *samtliga* sådana värden på c_1. .... (4p)

(d) Finns det något eller några värden på konstanten c_1 som gör att punkten $\mathbf{x} = (1,\, 1,\, 1)^\mathsf{T}$ är en optimal lösning till problemet?
Bestäm i såfall *samtliga* sådana värden på c_1. .... (4p)

Frivillig räknehjälp: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

Lycka till!