Lösningar till 5B1762 Optimeringslära för T, 24/5-07

Uppgift 1.(a)

Först använder vi Gauss–Jordans metod på den givna matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Addition av 1 gånger första raden till andra raden ger till resultat matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Addition av -1 gånger andra raden till första raden, samt addition av 1 gånger andra raden till tredje raden, ger till resultat matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{U}.$$

Nu är $\mathbf{A}$ överförd till trappstegsform med *två trappstegsettor*.

En bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ erhålls genom att som basvektorer välja de kolonner i $\mathbf{A}$ som svarar mot trappstegsettor i $\mathbf{U}$, dvs kolonnerna 1 och 2 i $\mathbf{A}$.

De två vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ utgör alltså en bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$

En bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ kan bestämmas enligt följande:
Sätt $x_3 = 1$ (den enda variabel som inte svarar mot en trappstegsetta)
och bestäm sedan x_1 och x_2 (variablerna svarande mot trappstegsettor)

så att $\mathbf{Ux} = \mathbf{0}$. Det ger den första och enda basvektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ till $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.

Fortsättning på nästa sida.

Nu använder vi Gauss–Jordans metod på matrisen

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Addition av -1 gånger första raden till andra raden ger till resultat matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Addition av 1 gånger andra raden till första raden, samt addition av -1 gånger andra raden till tredje raden, ger till resultat matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{U}}.$$

Nu är $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ överförd till trappstegsform med *två trappstegsettor*.

En bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$ erhålls genom att som basvektorer välja de kolonner i $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ som svarar mot trappstegsettor i $\tilde{\mathbf{U}}$, dvs kolonnerna 1 och 2 i $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$.

De två vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ utgör alltså en bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$

En bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$ kan bestämmas enligt följande:
Sätt $y_3 = 1$ (den enda variabel som inte svarar mot en trappstegsetta)
och bestäm sedan y_1 och y_2 (variablerna svarande mot trappstegsettor)

så att $\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Det ger den första och enda basvektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ till $\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$.

Uppgift 1.(b)

Inför följande beslutsvariabler:

x_j = antal kg av produkten P_j som blandas till per vecka.
y_i = antal kg av råvaran R_i som köps in per vecka.

Då kan företagets frågeställning formuleras som följande LP-problem i variablerna x_j och y_i:

$$\begin{array}{rl} \text{maximera} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \text{då} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - y_i \leq 0\,, \quad i = 1, \ldots, m \\ & 0 \leq x_j \leq d_j\,, \quad j = 1, \ldots, n \\ & 0 \leq y_i \leq e_i\,, \quad i = 1, \ldots, m. \end{array}$$

Kommentar: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ anger hur mycket som går åt av råvaran R_i per vecka, och man måste köpa in minst så mycket. Å andra sidan är det bortkastat att köpa in mer än man behöver, så vi kan utgå från att $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ i varje optimal lösning. Med hjälp av detta samband kan variablerna y_i elimineras ur problemet, varvid följande LP-problem i enbart variablerna x_j erhålls:

$$\begin{array}{rl} \text{maximera} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} k_j x_j \\ \text{då} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq e_i\,, \quad i = 1, \ldots, m \\ & 0 \leq x_j \leq d_j\,, \quad j = 1, \ldots, n, \end{array}$$

där konstanterna k_j i målfunktionen ges av $k_j = c_j - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} b_i a_{ij}$.

Den första formuleringen är nog att föredra. Det finns ingen anledning att välja en formulering med så få variabler som möjligt.

Uppgift 2.(a)

Eftersom alla $c_j = 10^{-3}$ så är töjningsenergiminimeringsproblemet ekvivalent med QP-problemet

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & \frac{1}{2}\,\mathbf{f}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\,\mathbf{f} \\ \text{då} & \mathbf{R}\,\mathbf{f} = \mathbf{p}\,, \end{array}$$

där $\mathbf{H} = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{R} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Matrisen $\mathbf{H}$ är positivt definit, ty för varje vektor $\mathbf{z} \in I\!R^4$ med $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ är $\mathbf{z}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\mathbf{z} = 10^{-3}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2) > 0$.

Därmed är QP-problemet ekvivalent med det linjära ekvationssystemet

$$\begin{array}{rcrcl} \mathbf{H}\,\mathbf{f} & - & \mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} & = & \mathbf{0}, \\ \mathbf{R}\,\mathbf{f} & & & = & \mathbf{p}. \end{array}$$

Ur $\mathbf{H}\,\mathbf{f} - \mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ erhålls att $\mathbf{f} = 10^3 \cdot \mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}$,

som insatt i $\mathbf{R}\,\mathbf{f} = \mathbf{p}$ ger ekvationssystemet $10^3 \cdot \mathbf{R}\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} = \mathbf{p}$, dvs

$$10^3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \text{ med lösningen } \mathbf{u} = 10^{-3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Normalkrafterna i stängerna ges sedan av

$$\hat{\mathbf{f}} = 10^3 \cdot \mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Med den givna lastvektorn blev det alltså dragkraft i alla fyra stängerna.

Uppgift 2.(b)

Om $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$ så blir enligt ovan $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = 10^{-3} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z/2 \end{pmatrix}$.

Vidare blir $\hat{f}_1 - \hat{f}_2 + \hat{f}_3 - \hat{f}_4 = (1, -1, 1, -1)\,\hat{\mathbf{f}} = 10^3 \cdot (1, -1, 1, -1)\,\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, -1, 1, -1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = 0.$$

Uppgift 3.(a)

Om vi inför slackvariabler x_5 och x_6, för att överföra olikhetsbivillkoren till likhetsbivillkor, så får vi ett LP-problem på standardformen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\,, \end{aligned}$$

där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{c}^\mathsf{T} = (-30,\, 40,\, -20,\, 50,\, 0,\, 0)$.

Startlösningen ska ha basvariablerna x_5 och x_6, dvs $\beta = (5, 6)$ och $\delta = (1, 2, 3, 4)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, medan $\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Vektorn $\mathbf{y}$ med simplexmultiplikatorerna värden erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T} \mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av

$$\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\delta = (-30,\, 40,\, -20,\, 50) - (0,\, 0) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (-30,\, 40,\, -20,\, 50).$$

Eftersom $r_{\delta_1} = r_1 = -30$ är minst, och < 0, ska vi låta x_1 bli ny basvariabel.

Då behöver vi beräkna vektorn $\bar{\mathbf{a}}_1$ ur systemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{a}_1$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} \\ \bar{a}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{a}}_1 = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} \\ \bar{a}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Det största värde som den nya basvariabeln x_1 kan ökas till ges av

$$t^{\max} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} \mid \bar{a}_{i1} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{8}{1},\, \frac{4}{1} \right\} = \frac{4}{1} = \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{21}}.$$

Minimerande index är $i = 2$, varför $x_{\beta_2} = x_6$ inte längre får vara kvar som basvariabel. Dess plats tas av x_1.

Nu är alltså $\beta = (5, 1)$ och $\delta = (6, 2, 3, 4)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, medan $\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Vektorn $\mathbf{y}$ med simplexmultiplikatorerna värden erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -30 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -30 \end{pmatrix}$.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av

$$\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\delta = (0,\, 40,\, -20,\, 50) - (0,\, -30) \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (30,\, 10,\, 10,\, 20).$$

Eftersom $\mathbf{r}_\delta \geq \mathbf{0}$ så är den aktuella baslösningen optimal.

Därmed är punkten $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ optimal till det ursprungliga problemet. Optimalvärdet är $z = -120$.

Uppgift 3.(b)

Antag nu att $\mathbf{c}^\mathsf{T} = (-30,\, 40,\, -20,\, 20,\, 0,\, 0)$ i stället för $(-30,\, 40,\, -20,\, 50,\, 0,\, 0)$.

Om vi startar från slutlösningen ovan, med $\beta = (5, 1)$ och $\delta = (6, 2, 3, 4)$, så gäller fortfarande att

$$\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix},\ \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -30 \end{pmatrix}.$$

Men reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges nu av

$$\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\delta = (0,\, 40,\, -20,\, 20) - (0,\, -30) \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (30,\, 10,\, 10,\, -10).$$

Eftersom $r_{\delta_4} = r_4 = -10$ är minst, och < 0, ska vi låta x_4 bli ny basvariabel.

Då behöver vi beräkna vektorn $\bar{\mathbf{a}}_4$ ur systemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_4 = \mathbf{a}_4$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{14} \\ \bar{a}_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{a}}_4 = \begin{pmatrix} \bar{a}_{14} \\ \bar{a}_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Eftersom $\bar{\mathbf{a}}_4 \leq \mathbf{0}$ så kan x_4 öka obegränsat, varvid målfunktionsvärdet går mot $-\infty$. Därmed saknar problemet ändligt optimalvärde och algoritmen avbryts.

Extra kommentar (som inte krävs):

Om man sätter $x_4 = t$ och låter t öka från 0, medan de övriga ickebasvariablerna ligger kvar vid 0, så påverkas målfunktionen enligt $z = \bar{z} + r_4 t = -120 - 10t$, medan basvariablernas värden påverkas enligt $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{a}}_4 t$, dvs $\begin{pmatrix} x_5 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} t$.

Detta kan skrivas $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{d}$.

Då är $\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}$ och $\mathbf{x}(t) \geq \mathbf{0}$ för alla $t \geq 0$, dvs $\mathbf{x}(t)$ är en tillåten lösning för varje $t \geq 0$,

medan $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{d} = -120 - 10t \to -\infty$ då $t \to +\infty$.

Uppgift 3.(c)

Om primala problemet är på standardformen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

så är det duala problemet på formen: maximera $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$ då $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}$, som här blir:

$$\begin{array}{rrcrcr} \text{maximera} & 8y_1 & + & 4y_2 & & \\ \text{då} & y_1 & + & y_2 & \leq & -30, \\ & y_1 & - & y_2 & \leq & 40, \\ & -y_1 & + & y_2 & \leq & -20, \\ & -y_1 & - & y_2 & \leq & 50, \\ & y_1 & & & \leq & 0, \\ & & & y_2 & \leq & 0. \end{array}$$

Om man ritar upp det tillåtna området till detta problem i en figur med y_1 och y_2 på axlarna så ser man att det blir en femhörning med hörnen i koordinaterna $(-5\,,\,-25)$, $(\,0\,,\,-30)$, $(\,0\,,\,-40)$, $(-5\,,\,-45)$ och $(-15\,,\,-35)$.

Uppgift 3.(d)

I figuren ovan ska vi nu byta ut bivillkoret $-y_1 - y_2 \leq 50$ mot bivillkoret $-y_1 - y_2 \leq 20$. Men då ser man direkt att det inte finns något $\mathbf{y}$ som uppfyller både $y_1 + y_2 \leq -30$ och $-y_1 - y_2 \leq 20$. (Vilket även inses om man adderar dessa båda olikheter.)
Alltså saknar det duala problemet tillåtna lösningar, vilket är vad vi väntade oss eftersom det primala problemet hade tillåtna lösningar men saknade (ändlig) optimallösning.

Uppgift 4.

Vi har ett kvadratiska optimeringsproblem med linjära olikhetsbivillkor på formen

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & \frac{1}{2}\,\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\ \text{då} & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\,, \end{array}$$

där $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Vi ska lösa problemet med den metod som finns kortfattat sammanfattad på formelbladet (i form av ett antal "Steg").

I den givna startpunkten $\bar{\mathbf{x}} = (0,\,0,\,0)^{\mathsf{T}}$ är all tre bivillkoret uppfyllda med likhet. Därför startar vi med $\alpha = (1,2,3)$ och γ tom.

Då är $\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, och därmed $\mathbf{A}_\alpha^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Vi får svaret "JA" i Steg 1, ty $\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \mathbf{A}_\alpha^{\mathsf{T}}\bar{\mathbf{u}}$ med $\bar{\mathbf{u}} = (-5,\,-4,\,-2)^{\mathsf{T}}$, så vi går till Steg 2.

Här konstateras att $\bar{u}_1 < 0$ (och minst), varför $\alpha_1 = 1$ flyttas över till γ–vektorn.

Sedan går vi till Steg 3 med $\alpha = (2,3)$, $\gamma = (1)$ och $\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

I Steg 3 ska vi minimera $\frac{1}{2}\,\mathbf{d}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\mathbf{d} + (\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c})^{\mathsf{T}}\mathbf{d}$ under bivillkoret $\mathbf{A}_\alpha\mathbf{d} = \mathbf{0}$,

dvs minimera $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3 - 5d_1 - 4d_2 - 2d_3$ då $d_2 = 0$ och $d_3 = 0$.

Insättning av $d_2 = d_3 = 0$ i målfunktionen leder till att vi ska minimera $d_1^2 - 5d_1$ med avseende på d_1. Detta enkla envariabelproblem har den optimala lösningen $\hat{d}_1 = 2.5$.

Vi får alltså att $\hat{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Eftersom $\bar{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ uppfyller alla bivillkor låter vi denna punkt bli nästa iterationspunkt $\bar{\mathbf{x}}$ och går till Steg 1.

Nu är $\alpha = (2,3)$ och $\gamma = (1)$. Vidare är

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0.0 \\ -1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix},\quad \mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_\alpha^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi får svaret "JA" i Steg 1, ty $\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \mathbf{A}_\alpha^{\mathsf{T}}\bar{\mathbf{u}}$ med $\bar{\mathbf{u}} = (-1.5,\,0.5)^{\mathsf{T}}$, så vi går till Steg 2.

Här konstateras att $\bar{u}_1 < 0$ (och minst), varför $\alpha_1 = 2$ flyttas över till γ–vektorn.

Sedan går vi till Steg 3 med $\alpha = (3)$, $\gamma = (1,2)$ och $\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

I Steg 3 ska vi minimera $\frac{1}{2}\,\mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{d} + (\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c})^\mathsf{T}\mathbf{d}$ under bivillkoret $\mathbf{A}_\alpha \mathbf{d} = \mathbf{0}$,

dvs minimera $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3 - 1.5 d_2 + 0.5 d_3$ då $d_3 = 0$.

Insättning av $d_3 = 0$ i målfunktionen leder till att vi ska minimera $d_1^2 + d_2^2 + d_1 d_2 - 1.5 d_2$ med avseende på d_1 och d_2, utan några bivillkor.

Detta konvexa kvadratiska tvåvariabelproblem är ekvivalent med ekvationssystemet

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.5 \end{pmatrix}$, med lösningen $\hat{d}_1 = -0.5$, $\hat{d}_2 = 1$.

Vi får alltså att $\hat{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Eftersom $\bar{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ uppfyller alla bivillkor låter vi denna punkt bli nästa iterationspunkt $\bar{\mathbf{x}}$ och går till Steg 1.

Nu är $\alpha = (3)$ och $\gamma = (1, 2)$. Vidare är

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \;\; \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \;\; \mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \;\; \mathbf{A}_\alpha^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi får svaret "JA" i Steg 1, ty $\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \mathbf{A}_\alpha^\mathsf{T}\bar{\mathbf{u}}$ med $\bar{\mathbf{u}} = 1$, så vi går till Steg 2.

Här konstateras att $\bar{\mathbf{u}} \geq \mathbf{0}$, varför den aktuella iterationspunkten

$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, tillsammans med vektorn $\hat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, uppfyller optimalitetsvillkoren,

dvs $\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{b}$, $\hat{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0}$ och $\hat{\mathbf{y}}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) = 0$. Vi stannar därför här.

Uppgift 5.(a)

Problemet kan skrivas på formen: minimera $f(\mathbf{x})$ då $g_i(\mathbf{x}) \le 0$, $i = 1, 2, 3$, där

$f(\mathbf{x}) = c_1x_1 - 4x_2 - 2x_3$, $g_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2$, $g_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_3^2 - 2$, $g_3(\mathbf{x}) = x_2^2 + x_3^2 - 2$.

Målfunktionen är linjär, och därmed även konvex.
De kvadratiska bivillkorsfunktionerna har andraderivatsmatriserna

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ och } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ som samtliga är positivt semidefinita.}$$

Därmed är även bivillkorsfunktionerna konvexa, varför det betraktade problemet är ett konvext optimeringsproblem. Vidare uppfyller exempelvis $\mathbf{x} = (0, 0, 0)^\mathsf{T}$ samtliga bivillkor med strikt olikhet, så det betraktade problemet är ett *regulärt* konvext problem. Det betyder att en punkt $\hat{\mathbf{x}}$ är en globalt optimal lösning till problemet om och endast om $\hat{\mathbf{x}}$ är en KKT-punkt.

Uppgift 5.(b) Lagrangefunktionen kan skrivas $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{3} y_i g_i(\mathbf{x}) =$
$= c_1x_1 - 4x_2 - 2x_3 + y_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) + y_2(x_1^2 + x_3^2 - 2) + y_3(x_2^2 + x_3^2 - 2)$.

KKT-villkoren kan delas upp i fyra grupper enligt följande.

(KKT–1) $\partial L/\partial x_j = 0$ för $j = 1, 2, 3$:
$c_1 + 2x_1(y_1 + y_2) = 0,$
$-4 + 2x_2(y_1 + y_3) = 0,$
$-2 + 2x_3(y_2 + y_3) = 0.$

(KKT–2) Tillåten punkt, dvs $g_i(\mathbf{x}) \le 0$ för $i = 1, 2, 3$:
$x_1^2 + x_2^2 - 2 \le 0,$
$x_1^2 + x_3^2 - 2 \le 0,$
$x_2^2 + x_3^2 - 2 \le 0.$

(KKT–3) Lagrangemultiplikatorerna icke-negativa:
$y_1 \ge 0,$
$y_2 \ge 0,$
$y_3 \ge 0.$

(KKT–4) Komplementaritetsvillkor, dvs $y_i g_i(\mathbf{x}) = 0$ för $i = 1, 2, 3$:
$y_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) = 0,$
$y_2(x_1^2 + x_3^2 - 2) = 0,$
$y_3(x_2^2 + x_3^2 - 2) = 0.$

Uppgift 5.(c) Antag först att $\mathbf{x} = (1.4,\ 0.2,\ 0.2)^\mathsf{T}$.

Då är $x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$, $x_1^2 + x_3^2 - 2 = 0$, $x_2^2 + x_3^2 - 2 < 0$.
Komplementaritetsvillkoren ger då att $y_3 = 0$, varefter villkoren KKT–1 kan skrivas

$$\begin{aligned} c_1 + 2.8(y_1 + y_2) &= 0, \\ -4 + 0.4(y_1 + 0) &= 0, \\ -2 + 0.4(y_2 + 0) &= 0. \end{aligned}$$

Vi ser att detta system saknar lösning om $c_1 \neq -42$.
Om $c_1 = -42$ så uppfyller $\mathbf{x} = (1.4,\ 0.2,\ 0.2)^\mathsf{T}$, tillsammans med $\mathbf{y} = (10,\ 5,\ 0)^\mathsf{T}$, samtliga KKT-villkor, varvid $\mathbf{x}$ är en global optimallösning till problemet.

Uppgift 5.(d) Antag nu att $\mathbf{x} = (1,\, 1,\, 1)^{\mathsf{T}}$.

Då är $x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0,\ x_1^2 + x_3^2 - 2 = 0,\ x_2^2 + x_3^2 - 2 = 0.$

Villkoren KKT–1 kan nu skrivas

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= -0.5\, c_1, \\ y_1 + y_3 &= \ \ 2, \\ y_2 + y_3 &= \ \ 1. \end{aligned}$$

Lösningen till detta ekvationssystem i $\mathbf{y}$ blir, med utnyttjande av den givna räknehjälpen,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -0.5\, c_1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -0.5\, c_1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -c_1 + 2 \\ -c_1 - 2 \\ c_1 + 6 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att villkoren KKT–3 blir uppfyllda om och endast om $-6 \le c_1 \le -2$.

För dessa värden på konstanten c så uppfyller $\mathbf{x} = (1,\, 1,\, 1)^{\mathsf{T}}$, tillsammans med

$\mathbf{y} = \left(\dfrac{2 - c_1}{4}, \dfrac{-2 - c_1}{4}, \dfrac{6 + c_1}{4} \right)^{\mathsf{T}}$, samtliga KKT-villkor, varvid $\mathbf{x}$ är en global optimallösning.