KTH Matematik

Förkunskapsuppgifter till 5B1762 Optimeringslära för T

Sammanställda av Krister Svanberg, januari 2007.

1. Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Avgör vilka av följande uttryck som är väldefinierade, och beräkna dessa.

$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y}$, $\mathbf{x}\mathbf{y}^\mathsf{T}$, $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y}$, $\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}$, $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$. $(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}$, $(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}$.

2. Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Använd Gauss-Jordans metod (enkla radoperationer) för att överföra matrisen $\mathbf{A}$ till trappstegsform.

Bestäm sedan, på parameterform, samtliga lösningar till ekvationssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Avgör slutligen om raderna i matrisen $\mathbf{A}$ är linjärt beroende eller linjärt oberoende.

3. Skriv en m–fil i Matlab som för en given $m \times n$-matris $\mathbf{A}$ och en given n-vektor $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)^\mathsf{T}$, beräknar följande:

vektorn $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} d_j \cdot \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{a}_j$, där $\mathbf{a}_j$ är den j:te kolonnen i matrisen $\mathbf{A}$,

matrisen $\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^{n} d_j \cdot \mathbf{a}_j\mathbf{a}_j^\mathsf{T}$ och dess egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$,

en lösning $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)^\mathsf{T}$ till ekvationssystemet $(\mathbf{Z} + \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{d}$, där $\mathbf{I}$ är $m \times m$ enhetsmatrisen.

4. Betrakta fackverket nedan med tio stycken stänger. De två noderna längst till vänster är fixerade (i väggen) så strukturen har åtta frihetsgrader, nämligen förskjutningarna i horisontal- resp vertikalled av de fyra icke-fixerade noderna. I de nedre noderna appliceras givna yttre krafter, som måste balanseras av normalkrafter i stängerna och reaktionskrafterna i de givna stöden. Låt f_j beteckna normalkraften i stång j ($f_j > 0$ för drag och $f_j < 0$ för tryck) och låt $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_{10})^\mathsf{T}$.

Ställ upp det ekvationssystem som dessa normalkrafter måste uppfylla för att det ska råda kraftbalans i noderna, och skriv detta system på formen $\mathbf{Af} = \mathbf{b}$, där du ska ange matrisen $\mathbf{A}$ och vektorn $\mathbf{b}$.
Kan detta ekvationssystem ha en *entydig* lösning? (Du behöver inte lösa systemet.)

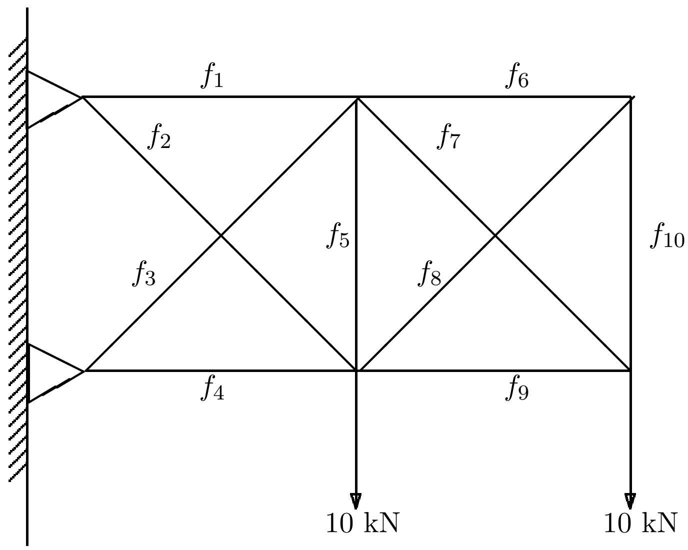

Figure 1: Ett fackverk med tio stänger.

5. Antag att man plockar bort stängerna nr 5, 6, 8 och 10 i figuren ovan.
Upprepa uppgift 4 för detta reducerade fackverk. Nu ska du dessutom lösa ekvationssystemet!