KTH Matematik

Tentamen i 5B1712 och 5B1717 Optimeringslära för F.
Onsdag 7 mars 2007 kl. 14.00–19.00

Examinator: Krister Svanberg, tel. 790 71 37

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis, förutsatt att de formuleras korrekt.

24 poäng, inklusive bonuspoäng från laborationerna, ger godkänt. 21-23 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

1. (a) Mustmans familjeföretag producerar och säljer fyra olika mustsorter: Äppelmust, Päronmust, Blandmust och Cidermust.

Varje hektoliter must kräver p arbetstimmar för tillverkning och q arbetstimmar för förpackning. Mustmans ekonomiska vinst på musten är v kronor/hektoliter.

p, q och v har olika värden för de olika mustsorterna enligt följande tabell:

	p	q	v
Äppelmust	1.6	1.2	196
Päronmust	1.8	1.2	210
Blandmust	3.2	1.2	280
Cidermust	5.4	1.8	442

En normal vecka har företaget 80 timmar (två familjemedlemmar) att tillgå för tillverkning och 40 timmar (en familjemedlem) för förpackning.

Vidare har man bestämt att äppelmusten ska svara för *minst* 20% av den producerade volymen must och att päronmusten ska svara för *högst* 30% av den producerade volymen must.

Frågan är hur mycket av respektive mustsort som ska tillverkas per vecka för att Mustmans vinst ska maximeras under ovan angivna villkor. Musten är populär och man kan utan svårighet sälja det man producerar.

Din uppgift är nu att *formulera* Mustmans problem som ett LP-problem.
Du behöver däremot *inte* beräkna optimal lösning. ....(5p)

(b) Betrakta LP-problemet

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ -2 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix}$

och $\mathbf{c}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 & 3 & 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Av det speciella utseendet på matrisen $\mathbf{A}$ följer att problemet i själva verket är ett minkostnadsflödesproblem. Rita motsvarande nätverk och verifiera därefter att $\hat{\mathbf{x}} = (2\,,0\,,1\,,0\,,0\,,5\,,0\,,4\,,3)^\mathsf{T}$ är en optimal lösning till problemet. . . . (5p)

2. (a) Följande system består av två linjära ekvationer och fyra linjära olikheter.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 10, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 12, \\ x_1 & & & & & & & \geq & 0, \\ & & x_2 & & & & & \geq & 0, \\ & & & & x_3 & & & \geq & 0, \\ & & & & & & x_4 & \geq & 0. \end{array}$$

För att på ett systematiskt sätt utreda huruvuda det finns en tillåten lösning till detta system kan man bilda följande LP-problem med de två "artificiella" variablerna x_5 och x_6.

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcr} \text{minimera} & & & & & & & & & x_5 & + & x_6 & & \\ \text{då} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & x_5 & & & = & 10, \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & & & + & x_6 & = & 12, \\ & x_1 & & & & & & & & & & & \geq & 0, \\ & & & x_2 & & & & & & & & & \geq & 0, \\ & & & & & x_3 & & & & & & & \geq & 0, \\ & & & & & & & x_4 & & & & & \geq & 0, \\ & & & & & & & & & x_5 & & & \geq & 0, \\ & & & & & & & & & & & x_6 & \geq & 0. \end{array}$$

Dina uppgift är att först lösa detta LP-problem med simplexmetoden, och sedan besvara frågan huruvida det finns någon lösning till det ursprungliga systemet ovan. Motivera svaret ordentligt! . . . . (6p)

(b) Följande båda LP-problem (som har sitt ursprung i ett visst två-personers nollsummespel) är varandras duala problem. Det behöver du inte visa.

$$\begin{array}{rl}
\text{minimera} & x_3 \\
\text{då} & -x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 0 \\
& 3x_1 - 4x_2 + x_3 \geq 0 \\
& x_1 + x_2 \qquad = 1 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \text{ fri.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{maximera} & y_3 \\
\text{då} & -y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 0 \\
& 2y_1 - 4y_2 + y_3 \leq 0 \\
& y_1 + y_2 \qquad = 1 \\
& y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \text{ fri.}
\end{array}$$

Man har löst det primala problemet ovan och erhållit den optimala lösningen $\hat{x}_1 = 0.6$, $\hat{x}_2 = 0.4$, $\hat{x}_3 = -0.2$. Använd denna information för att (på valfritt sätt) bestämma en optimal lösning $\hat{\mathbf{y}}$ till det duala problemet. .... (4p)

3. I hela denna uppgift är

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

(a) Ange en symmetrisk 3×3–matris $\mathbf{H}$ sådan att $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{x}$. .... (1p)

(b) Bestäm *en* lösning $\bar{\mathbf{x}}$ till ekvationssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. .... (1p)

(c) Bestäm en bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ (= nollrummet till $\mathbf{A}$). .... (2p)

(d) Använd resultaten från (a)–(c) för att bestämma en optimal lösning $\hat{\mathbf{x}}$ till problemet att minimera $f(\mathbf{x})$ då $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. .... (2p)

(e) Låt nu $\mathbf{c} \in I\!R^3$ vara en given vektor och betrakta problemet att minimera $f(\mathbf{x}) + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ då $\mathbf{x} \in I\!R^3$, dvs ett kvadratiskt optimeringsproblem *utan* bivillkor. För vissa val av vektorn $\mathbf{c}$ visar det sig att detta problem har minst en optimal lösning, som därmed utgör en minpunkt till $f(\mathbf{x})+\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$, medan det för andra val av vektorn $\mathbf{c}$ visar sig att $f(\mathbf{x}) + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ är nedåt obegränsad och därmed saknar minpunkt. Din uppgift är nu att visa att det finns en vektor $\mathbf{a} \in I\!R^3$, som du ska ange, sådan att följande ekvivalens gäller:

$f(\mathbf{x}) + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ har minst en minpunkt $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{c} = 0$. .... (4p)

4. Låt δ_1, δ_2, δ_3 och δ_4 vara fyra stycken givna tal (som typiskt är ganska "små") och betrakta följande ickelinjära minsta-kvadratproblem i variabelvektorn $\mathbf{x} \in I\!R^2$:

$$\text{minimera} \quad f(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}(h_1(\mathbf{x})^2 + h_2(\mathbf{x})^2 + h_3(\mathbf{x})^2 + h_4(\mathbf{x})^2),$$

där funktionerna h_i ges av

$$\begin{aligned} h_1(\mathbf{x}) &= x_1^2 - x_2 - \delta_1\,, \\ h_2(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2 - \delta_2\,, \\ h_3(\mathbf{x}) &= x_2^2 - x_1 - \delta_3\,, \\ h_4(\mathbf{x}) &= x_2^2 + x_1 - \delta_4\,. \end{aligned}$$

(a) Antag först att $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0$.
Visa att då är $\hat{\mathbf{x}} = (0,0)^\mathsf{T}$ en global minpunkt till $f(\mathbf{x})$.
(Detta motiverar att vi använder denna punkt till startpunkt nedan.) ...(1p)

(b) Antag nu att $\delta_1 = -0.1$, $\delta_2 = 0.1$, $\delta_3 = -0.2$ och $\delta_4 = 0.2$.
Genomför en iteration med Gauss-Newtons metod utgående från $\mathbf{x}^{(1)} = (0,0)^\mathsf{T}$.
Kontrollera speciellt att din erhållna punkt $\mathbf{x}^{(2)}$ uppfyller $f(\mathbf{x}^{(2)}) < f(\mathbf{x}^{(1)})$.
Avgör sedan om $\mathbf{x}^{(2)}$ är en lokal minpunkt till $f(\mathbf{x})$. ....(5p)

OBSERVERA att uppgift 4 ger total högst 6p. I stället kan uppgift 5 ge totalt 14p.

5. Betrakta följande kvadratiska optimeringsproblem med tre variabler och fyra linjära olikhetsbivillkor:

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ \text{då} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0, \\ & x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

(a) Använd den iterativa metod som ingår i kursen för att bestämma en optimal lösning $\hat{\mathbf{x}}$. Du måste starta från punkten $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. ....(6p)

(b) Problemet kan skrivas på formen: minimera $f(\mathbf{x})$ då $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ för $i = 1,2,3,4$.
Gör det, och ställ upp KKT-villkoren för problemet skrivet på denna form.
Visa sedan att det *inte* går att hitta någon vektor $\mathbf{y} \in I\!R^4$ som tillsammans med startpunkten $\mathbf{x} = (1,0,0)^\mathsf{T}$ ovan uppfyller dessa KKT-villkor.
Visa slutligen att det *går* att hitta en vektor $\hat{\mathbf{y}} \in I\!R^4$ som tillsammans med din optimala lösning $\hat{\mathbf{x}}$ från (a)-uppgiften uppfyller dessa KKT-villkor. ......(4p)

(c) Problemet kan också skrivas på formen: minimera $f(\mathbf{x})$ då $g_1(\mathbf{x}) \leq 0$ och $\mathbf{x} \in X$, där $X = \{\mathbf{x} \in I\!R^3 \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.
Gör det, och härled ett explicit uttryck på den duala målfunktionen $\varphi(y_1)$.
Formulera det duala problemet, och bestäm en optimal lösning $\hat{y}_1$ till detta.
Är optimalvärdena till primala resp duala problemet lika? ....(4p)

Lycka till!