KTH Matematik

Tentamen i 5B1712 Optimeringslära för F.
Onsdag 8 mars 2006 kl. 14.00–19.00

Examinator: Krister Svanberg, tel. 790 71 37

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. Ett formelblad delas ut vid tentamen.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis, förutsatt att de formuleras korrekt.

24 poäng, inklusive bonuspoäng från laborationerna, ger godkänt. 21-23 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

1. Betrakta följande linjära optimeringsproblem:

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\ \text{då} \quad & x_1 + x_2 \geq 2, \\ & x_1 + x_3 \geq 2, \\ & x_2 + x_3 \geq 2, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

(a) Använd simplexmetoden för att bestämma en optimal lösning. Du måste utgå från baslösningen $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ (som är tillåten men inte optimal). . . (7p)

(b) Formulera det motsvarande duala LP-problemet och ange en optimal lösning till detta. Kontrollera speciellt att optimalvärdena är lika. . . . . (3p)

Frivillig räknehjälp: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

2. Betrakta följande kvadratiska optimeringsproblem med linjära olikhetsbivillkor:

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \text{då} \quad & x_1 + x_2 \geq 6, \\ & x_1 + x_3 \geq 3, \\ & x_2 + x_3 \geq 7. \end{aligned}$$

(a) Använd den iterativa metod som ingår i kursen för att bestämma en optimal lösning. Du måste utgå från punkten $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 2$ (som är tillåten men inte optimal). . . . . (7p)

(b) Verifiera att din erhållna optimallösning $\hat{\mathbf{x}}$ tillsammans med en viss vektor $\hat{\mathbf{y}}$ (som du ska ange) uppfyller optimalitetsvillkoren för problemet. . . . . (3p)

3. Betrakta ett balanserat Transportproblem med 4 st leverantörer och 4 st kunder:

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} \\ \text{då} \quad & \sum_{j=1}^{4} x_{ij} \;=\; s_i\,, \quad \text{för } i=1,\ldots,4 \\ & \sum_{i=1}^{4} x_{ij} \;=\; d_j\,, \quad \text{för } j=1,\ldots,4 \\ & x_{ij} \;\geq\; 0\,, \qquad \text{för alla } i \text{ och } j, \end{aligned}$$

där s_i = tillgången hos leverantör nr i, d_j = efterfrågan hos kund nr j,
c_{ij} = transportkostnaden per enhet från leverantör nr i till kund nr j.

Antag att tillgång och efterfrågan ges av

$s_1 = 80,\ s_2 = 60,\ s_3 = 40,\ s_4 = 20,$

$d_1 = 20,\ d_2 = 40,\ d_3 = 60,\ d_4 = 80,$

och att transportkostnaderna ges av tabellen:

c_{ij}	kund 1	kund 2	kund 3	kund 4
lev 1	16	25	36	49
lev 2	9	16	25	36
lev 3	4	9	16	25
lev 4	1	4	9	16

(a) Bestäm en tillåten baslösning med "North West Corner"–metoden. ......(1p)

(b) Visa att den lösning du tagit fram i (a)-uppgiften ovan råkar vara en optimal lösning. (Om du inte känner till "North West Corner"–metoden får du lösa problemet utgående från en valfri tillåten baslösning.) ....(5p)

(c) Antag att både s_4 och d_1 ändras från 20 till 40. Bestäm en optimal lösning till detta nya problem. Motivera svaret. ....(2p)

(d) Återställ s_4 och d_1 till 20. Antag att c_{22} minskas från 16 till $16 - \delta_{22}$, medan övriga c_{ij} är oförändrade. För vilka värden på δ_{22} gäller att den optimala lösningen från (b)-uppgiften ovan fortfarande är optimal? ....(2p)

4. (a) Låt $\mathbf{a} \in I\!R^3$ vara en given vektor och $b \in I\!R$ en given konstant.
Då är $\mathcal{P} = \{\, \mathbf{x} \in I\!R^3 \mid \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} = b \,\}$ ett plan i $I\!R^3$.
Låt $\bar{\mathbf{x}} \in I\!R^3$ vara en given punkt som uppfyller $\mathbf{a}^\mathsf{T}\bar{\mathbf{x}} < b$.
Bestäm den punkt $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{P}$ som ligger närmast $\bar{\mathbf{x}}$ bland alla punkter i $\mathcal{P}$,
dvs optimal lösning till problemet att minimera $|\,\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\,|^2$ då $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} = b$.
(Svaret kommer förstås att innehålla $\bar{\mathbf{x}}$, $\mathbf{a}$ och b.)
Visa också att det kortaste avståndet d från $\bar{\mathbf{x}}$ till planet $\mathcal{P}$, dvs $|\,\hat{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}\,|$,
ges av uttrycket $d = (b - \mathbf{a}^\mathsf{T}\bar{\mathbf{x}})/|\mathbf{a}|$. ....(4p)

(b) Antag att $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ är givna vektorer i $I\!R^3$ och att $b_1, \ldots, b_m$ är givna positiva tal (dvs $b_i > 0$).
Låt $\Omega = \{\, \mathbf{x} \in I\!R^3 \mid \mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} \le b_i,\ \text{för } i = 1, \ldots, m \,\}$.
Då är Ω ett område (i $I\!R^3$) vars "väggar" utgörs av plan på formen
$\mathcal{P}_i = \{\, \mathbf{x} \in I\!R^3 \mid \mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} = b_i \,\}$.
Antag nu att man vill bestämma medelpunkt och radie till den *största sfär* som får plats i området Ω.
Formulera detta som ett LP-problem! . . . . (6p)

5. Låt f vara en envariabelfunktion ($f : I\!R \to I\!R$) som dels är två gånger kontinuerligt deriverbar på på hela $I\!R$, dels uppfyller att $f(x) > 0$ för alla $x \in I\!R$.

Låt envariabelfunktionen g definieras av $g(x) = (f(x))^2$, för alla $x \in I\!R$.

Avgör vilka av följande påståenden som är sanna (bevis eller motexempel).

OBSERVERA den givna förutsättningen att $f(x) > 0$ för alla $x \in I\!R$.

(a) Om f är konvex på $I\!R$ så är g konvex på $I\!R$. . . . . (2p)

(b) Om f ej är konvex på $I\!R$ så är g ej konvex på $I\!R$. . . . . (2p)

(c) Om $\hat{x}$ är en lokal minpunkt till f så är $\hat{x}$ en lokal minpunkt till g. . . . . (2p)

(d) Om $\hat{x}$ ej är en lokal minpunkt till f så är $\hat{x}$ ej en lokal minpunkt till g. . . (2p)

(e) Antag att det i en given punkt $x_0 \in I\!R$ gäller att
$f'(x_0) \neq 0$, $f''(x_0) > 0$, $g'(x_0) \neq 0$ och $g''(x_0) > 0$.
Låt x_1 vara den punkt man erhåller om man utför *en* iteration med Newtons (envariabel-)metod för att minimera $f(x)$ utgående från punkten x_0,
och låt $\bar{x}_1$ vara den punkt man erhåller om man utför *en* iteration med Newtons (envariabel-)metod för att minimera $g(x)$ utgående från punkten x_0.
Visa att $|\bar{x}_1 - x_0| < |x_1 - x_0|$. . . . . (2p)

Kända satser får användas utan bevis om de formuleras ordentligt.

Lycka till!