KTH Matematik

Tentamen i 5B1712 Optimeringslära för F.
Lördag 3 juni 2006 kl. 8.00–13.00

Examinator: Krister Svanberg, tel. 790 71 37

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis, förutsatt att de formuleras korrekt.

24 poäng, inklusive bonuspoäng från laborationerna, ger godkänt. 21-23 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

1. Betrakta följande LP-problem på standardform:

$$
\begin{array}{rcccccccccccl}
\text{minimera} & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & 4x_5 & & \\
\text{då} & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & = & 5, \\
& & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & 4x_5 & = & 3, \\
& x_1 & & & & & & & & & \geq & 0, \\
& & & x_2 & & & & & & & \geq & 0, \\
& & & & & x_3 & & & & & \geq & 0, \\
& & & & & & & x_4 & & & \geq & 0, \\
& & & & & & & & & x_5 & \geq & 0.
\end{array}
$$

(a) Använd Simplexmetoden för att bestämma en optimal lösning till problemet. Starta med x_1 och x_5 som basvariabler. .... (5p)

(b) Optimallösningen är inte unik. Bestäm en annan optimal baslösning än den du erhöll i (a)-uppgiften. .... (2p)

(c) Formulera det motsvarande duala problemet och ange en optimal lösning till detta. Åskådliggör även det duala problemet grafiskt i en figur med y_1 och y_2 på koordinataxlarna. .... (3p)

2. Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(a) Antag först att man vill bestämma den vektor $\mathbf{x}$ i nollrummet till $\mathbf{A}$ som ligger närmast vektorn $\mathbf{q}$, dvs att man vill lösa problemet

$$\text{P1:}\quad \text{minimera } |\,\mathbf{x}-\mathbf{q}\,|^2 \ \text{ då } \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}),$$

där $|\cdot|$ betyder vanlig euklidisk norm i $I\!R^4$, dvs $|\,\mathbf{x}-\mathbf{q}\,|^2 = (\mathbf{x}-\mathbf{q})^{\mathsf{T}}(\mathbf{x}-\mathbf{q})$, och $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in I\!R^4 \,|\, \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Bestäm optimalt $\mathbf{x}$. .... (5p)

(b) Antag nu att man vill bestämma den vektor $\mathbf{x}$ i bildrummet till $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ som ligger närmast vektorn $\mathbf{q}$, dvs att man vill lösa problemet

$$\text{P2:}\quad \text{minimera } |\,\mathbf{x}-\mathbf{q}\,|^2 \text{ då } \mathbf{x}\in\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T}),$$

där $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = \{\mathbf{x}\in I\!R^4 \,|\, \mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v} \text{ för något } \mathbf{v}\in I\!R^2\}$. Bestäm optimalt $\mathbf{x}$. (5p)

3. I följande QP-problem med olikhetsbivillkor är talet c_3 en konstant.

$$\begin{aligned} \text{minimera}\quad & \tfrac{1}{2}x_1^2 + \tfrac{1}{2}x_2^2 + \tfrac{1}{2}x_3^2 - x_1 - x_2 + c_3x_3 \\ \text{då}\quad & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 + x_3 \geq 4 \\ & x_2 + x_3 \geq 4 \end{aligned}$$

(a) Finns det något eller några värden på konstanten c_3 som gör att punkten $\mathbf{x} = (2,2,2)^\mathsf{T}$ är en optimal lösning till problemet?
Bestäm i såfall *samtliga* sådana värden på c_3. ....(4p)

(b) Finns det något eller några värden på konstanten c_3 som gör att punkten $\mathbf{x} = (2,2,4)^\mathsf{T}$ är en optimal lösning till problemet?
Bestäm i såfall *samtliga* sådana värden på c_3. ....(3p)

(c) Finns det något eller några värden på konstanten c_3 som gör att punkten $\mathbf{x} = (3,3,1)^\mathsf{T}$ är en optimal lösning till problemet?
Bestäm i såfall *samtliga* sådana värden på c_3. ....(3p)

Frivillig räknehjälp: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

4. I denna uppgift är $f(\mathbf{x}) = x_1^2x_2^4x_3^6$, där $\mathbf{x} = (x_1,\, x_2,\, x_3)^\mathsf{T} \in I\!R^3$.

(a) Avgör om $\hat{\mathbf{x}} = (0,0,0)^\mathsf{T}$ är en *globalt* optimal lösning till problemet att minimera $f(\mathbf{x})$ under bivillkoret $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$. ....(1p)

(b) Avgör om $\hat{\mathbf{x}} = (0,0,0)^\mathsf{T}$ är en *lokalt* optimal lösning till problemet att minimera $f(\mathbf{x})$ under bivillkoret $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$. ....(1p)

(c) Avgör om f är en konvex funktion på $I\!R^3$ eller inte. ....(3p)

(d) Bestäm samtliga *globalt* optimala lösningar till problemet att maximera $f(\mathbf{x})$ under bivillkoret $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$.
Observera att det nu, till skillnad från ovan, är ett maximeringsproblem! (5p)

5. Ett företag har avtalat att leverera respektive p_1, p_2 och p_3 ton av en viss produkt (till en viktig kund) under de kommande 3 månadsskiftena. p_1, p_2 och p_3 är givna konstanter.

Varje månad kan företaget tillverka högst a ton till kostnaden c kr/ton. Genom att använda övertid kan man dessutom tillverka ytterligare högst b ton per månad till kostnaden d kr/ton. a, b, c och d är givna konstanter med $a > b$ och $d > c$.

De kvantiteter av produkten som tillverkas en viss månad men som inte behövs för leverans vid månadsskiftet kan lagras för leverans vid ett senare månadsskifte. Lagringskostnaden är ℓ kr per ton och månad som man lagrar. ℓ är en given konstant.

Om företaget inte levererar den avtalade kvantiteten ett visst månadsskifte, kan man istället leverera den saknade kvantiteten vid ett senare månadsskifte, dock inte senare än det 3:e och sista månadsskiftet. Avtalad förseningsavgift är f kr per ton och månad som man är försenad. f är en given konstant.

I början av månad 1 är lagret tomt, och man vill inte ha kvar något i lager efter de 3 månaderna. Vi kan anta att $p_1 + p_2 + p_3 < 3a + 3b$.

Formulera företagets planeringsproblem, i vilket företagets kostnader ska minimeras, som ett optimeringsproblem på lämplig form.

En helt korrekt formulering som LP-problem ger 8 poäng.
En helt korrekt formulering som minkostnadsflödesproblem ger 10 poäng.

Lycka till!