Lösningar till 5B1712 Optimeringslära, 8 mars 2006

Uppgift 1.(a)

Inför slackvariabler x_4, x_5 och x_6 så att problemet blir på standardformen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{c} = (1,\ 5,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0)^\mathsf{T}$.

Den givna startlösningen svarar mot att x_1, x_2 och x_3 är basvariabler, dvs att $\beta = (1, 2, 3)$ och $\delta = (4, 5, 6)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Detta är mycket riktigt den givna tillåtna baslösning vi skulle starta från.

Vektorn $\mathbf{y}$ med simplexmultiplikatorerna värden erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av $\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\delta =$

$= (0,\ 0,\ 0) - (2,\ -1,\ 3) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = (2,\ -1,\ 3).$

Eftersom $r_{\delta_2} = r_5 = -1$ är minst, och < 0, ska vi låta x_5 bli ny basvariabel.

Då behöver vi beräkna vektorn $\bar{\mathbf{a}}_5$ ur systemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_5 = \mathbf{a}_5$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{15} \\ \bar{a}_{25} \\ \bar{a}_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{a}}_5 = \begin{pmatrix} \bar{a}_{15} \\ \bar{a}_{25} \\ \bar{a}_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$.

Det största värde som den nya basvariabeln x_5 kan ökas till ges av

$$t^{\max} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i5}} \mid \bar{a}_{i5} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{25}} = \frac{1}{0.5}.$$

Minimerande index är $i = 2$, varför $x_{\beta_2} = x_2$ inte längre får vara kvar som basvariabel.

Nu är alltså $\beta = (1, 5, 3)$ och $\delta = (4, 2, 6)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Vektorn $\mathbf{y}$ med simplexmultiplikatorernas värden erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T} \mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av $\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta - \mathbf{y}^\mathsf{T} \mathbf{A}_\delta =$

$= (0,\ 5,\ 0) - (1,\ 0,\ 2) \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (1,\ 2,\ 2)$.

Eftersom $\mathbf{r}_\delta \geq \mathbf{0}$ så är den aktuella baslösningen optimal.
Alltså är punkten $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 2$, $x_6 = 0$ optimal.
Optimalvärdet är $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = 6$.

Uppgift 1.(b)
Om primala problemet är på standardformen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

så är det duala problemet

$$\text{maximera } \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y} \ \text{ då } \ \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} \leq \mathbf{c},$$

som utskrivet blir:

$$\begin{aligned} \text{maximera} \quad & 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \\ \text{då} \quad & y_1 + y_2 \leq 1, \\ & y_1 + y_3 \leq 5, \\ & y_2 + y_3 \leq 2, \\ & -y_1 \leq 0, \\ & -y_2 \leq 0, \\ & -y_3 \leq 0. \end{aligned}$$

Det är välkänt att en optimal lösning till detta duala problem ges av vektorn $\mathbf{y}$ med "simplexmultiplikatorerna" i optimala baslösningen i (a)-uppgiften, dvs $\mathbf{y} = (1,\ 0,\ 2)^\mathsf{T}$.
Man kontrollerar snabbt att detta är en tillåten lösning till det duala problemet.
Vidare är optimalvärdet $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y} = 6 =$ optimalvärdet för det primala problemet ovan.

Uppgift 2.
Vi har ett kvadratiska optimeringsproblem med linjära olikhetsbivillkor på formen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \tfrac{1}{2}\,\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\,, \end{aligned}$$

där $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Första iterationen: I den givna startpunkten är alla tre bivillkoret uppfyllda med likhet. Därför startar vi med $\alpha = (1, 2, 3)$ och γ tom.

Då är $\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{A}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Vi får svaret “JA” i Steg 1, ty $\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \mathbf{A}_\alpha^\mathsf{T}\bar{\mathbf{u}}$ med $\bar{\mathbf{u}} = (4,\ -2,\ 6)^\mathsf{T}$, så vi går till Steg 2.

Här konstateras att $\bar{u}_2 < 0$ (och minst), varför $\alpha_2 = 2$ flyttas över till γ–vektorn.

Sedan går vi till Steg 3 med $\alpha = (1, 3)$, $\gamma = (2)$ och $\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

I Steg 3 ska vi minimera $\tfrac{1}{2}\mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{d} + (\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c})^\mathsf{T}\mathbf{d}$ under bivillkoret $\mathbf{A}_\alpha\mathbf{d} = \mathbf{0}$,

Optimalitetsvillkoren för detta konvexa QP-problem med likhetsbivillkor ges av

$\mathbf{H}\mathbf{d} - \mathbf{A}_\alpha^\mathsf{T}\mathbf{u} = -(\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c})$ och $\mathbf{A}_\alpha\mathbf{d} = \mathbf{0}$.

Eftersom $\mathbf{H} = 2\,\mathbf{I}$ och $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ så ger de första ekvationerna att $\mathbf{d} = \tfrac{1}{2}\mathbf{A}_\alpha^\mathsf{T}\mathbf{u} - \bar{\mathbf{x}}$,

som insatt i $\mathbf{A}_\alpha\mathbf{d} = \mathbf{0}$ ger ekvationssystemet $\tfrac{1}{2}\mathbf{A}_\alpha\mathbf{A}_\alpha^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{A}_\alpha\bar{\mathbf{x}}$.

Lösningen till detta ekvationssystem är $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 16/3 \end{pmatrix}$, varefter $\hat{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.

Eftersom $\bar{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{d}} = (5/3,\ 13/3,\ 8/3)^\mathsf{T}$ uppfyller alla bivillkor låter vi denna punkt bli nästa iterationspunkt $\bar{\mathbf{x}}$ och går till Steg 1.

Ny iteration.

Nu är $\alpha = (1, 3)$, $\gamma = (2)$, $\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 13/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 26/3 \\ 16/3 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Vi får svaret “JA” i Steg 1, ty $\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \mathbf{A}_\alpha^\mathsf{T}\bar{\mathbf{u}}$ med $\bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 16/3 \end{pmatrix}$, så vi går till Steg 2.

Här konstateras att $\bar{\mathbf{u}} \geq \mathbf{0}$, varför den aktuella iterationspunkten

$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 13/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}$, tillsammans med vektorn $\hat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 0 \\ 16/3 \end{pmatrix}$, uppfyller optimalitetsvillkoren,

dvs $\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{b}$, $\hat{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0}$ och $\hat{\mathbf{y}}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) = 0$. Vi stannar därför här.

Uppgift 3.(a). Vi får följande tillåtna baslösning mha NWC-metoden:

x_{ij}	kund1	kund2	kund3	kund4	s_i
lev 1	20	40	20		80
lev 2			40	20	60
lev 3				40	40
lev 4				20	20
d_j	20	40	60	80	

Uppgift 3.(b). Svarande mot den tillåtna baslösningen ovan får vi följande simplexmultiplikatorer u_i och v_j, beräknade mha relationen $c_{ij} = u_i - v_j$ för basvariabler samt $v_4 = 0$.

c_{ij}	kund1	kund2	kund3	kund4	u_i
lev 1	16	25	36		47
lev 2			25	36	36
lev 3				25	25
lev 4				16	16
v_j	31	22	11	0	

Därefter får vi följande reducerade kostnader r_{ij} för ickebasvariablerna, uträknade mha relationen $r_{ij} = c_{ij} - u_i + v_j$.

r_{ij}	kund1	kund2	kund3	kund4	u_i
lev 1				2	47
lev 2	4	2			36
lev 3	10	6	2		25
lev 4	16	10	4		16
v_j	31	22	11	0	

Alla $r_{ij} \geq 0$, vilket medför att denna baslösning är optimal.

Uppgift 3.(c). Pröva att använda samma uppsättning basvariabler som i den optimala lösningen ovan. Det ger följande nya lösning:

x_{ij}	kund1	kund2	kund3	kund4	s_i
lev 1	40	40	0		80
lev 2			60	0	60
lev 3				40	40
lev 4				40	40
d_j	40	40	60	80	

Alla x_{ij} blev ≥ 0, så det är fortfarande en tillåten baslösning (men degenererad eftersom den har basvariabler med värdet 0). Beräkningen av u_i, v_j och r_{ij} blir identisk med ovan, så alla r_{ij} blir fortfarande ≥ 0. Alltså är lösningen i tabellen ovan optimal till det nya problemet.

Uppgift 3.(d). x_{22} är en ickebasvariabel i optimallösningen, så om c_{22} minskas med δ_{22} så minskas r_{22} med δ_{22} medan övriga r_{ij} ej påverkas. Därav följer att den givna lösningen fortfarande är optimal om och endast om $\delta_{22} \leq 2$.

Uppgift 4.(a).

Problemet att minimera $\frac{1}{2}|\,\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}\,|^2$ då $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x}=b$ är ett QP-problem med likhetsbivillkor.

Det kan skrivas på formen

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & \frac{1}{2}\,\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{x}+\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} & \mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}\,, \end{array}$$

där $\mathbf{H}=\mathbf{I}$, $\mathbf{c}=-\bar{\mathbf{x}}$, $\mathbf{A}=\mathbf{a}^\mathsf{T}$ och $\mathbf{b}=b$. (Ty $\frac{1}{2}\,|\,\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}\,|^2=\frac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}^\mathsf{T}\mathbf{x}+\frac{1}{2}\bar{\mathbf{x}}^\mathsf{T}\bar{\mathbf{x}}$).

Eftersom $\mathbf{H}$ är positivt definit så är följande optimalitetsvillkor såväl nödvändiga som tillräckliga: $\mathbf{H}\mathbf{x}+\mathbf{c}=\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}$ och $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$, vilket kan skrivas $\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{a}\,u$ och $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x}=b$.

Vi får att $\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}+\mathbf{a}\,u$, vilket insatt i $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x}=b$ ger att $u=(b-\mathbf{a}^\mathsf{T}\bar{\mathbf{x}})/|\mathbf{a}|^2$.

Optimal lösning till vårt problem är alltså $\hat{\mathbf{x}}=\bar{\mathbf{x}}+\mathbf{a}\,u$, med $u=(b-\mathbf{a}^\mathsf{T}\bar{\mathbf{x}})/|\mathbf{a}|^2$.

Enligt förutsättningarna är $\mathbf{a}^\mathsf{T}\bar{\mathbf{x}}<b$, och därmed är $u>0$.

Kortaste avståndet är då $d=|\,\hat{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{x}}\,|=|\mathbf{a}\,u|=|\mathbf{a}|\,|u|=|\mathbf{a}|\,u=(b-\mathbf{a}^\mathsf{T}\bar{\mathbf{x}})/|\mathbf{a}|$.

Uppgift 4.(b).

Först en kommentar. Eftersom enligt förutsättningarna alla $b_i>0$ så är exempelvis $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ en punkt som dels ligger i Ω, dels inte vidrör någon av väggarna i Ω. Alltså finns det plats för åtminstone en liten sfär i Ω.

Nu till fomuleringen. Låt $\mathbf{x}\in\Omega$ vara medelpunkten för vår sökta sfär och låt r vara dess radie. Vi kan förutsätta att $\mathbf{x}$ inte vidrör någon av väggarna i Ω, dvs att $\mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x}<b_i$ för alla i. Då kan avståndet $d_i(\mathbf{x})$ från punkten $\mathbf{x}$ till planet $\mathcal{P}_i$ skrivas $d_i(\mathbf{x})=(b_i-\mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x})/|\mathbf{a}_i|$.

Om sfären har medelpunkten i $\mathbf{x}$ så får den plats i Ω om och endast om dess radie r uppfyller att $r\le d_i(\mathbf{x})$ för alla $i=1,\ldots,m$.

Vi får därför följande LP-problem i variablerna $\mathbf{x}\in I\!R^3$ och $r\in I\!R$ (fyra variabler):

$$\begin{array}{rl} \text{maximera} & r \\ \text{då} & r\le d_i(\mathbf{x}),\ i=1,\ldots,m. \end{array}$$

eller, ekvivalent

$$\begin{array}{rl} \text{maximera} & r \\ \text{då} & |\mathbf{a}_i|\,r+\mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x}\le b_i,\ i=1,\ldots,m. \end{array}$$

Uppgift 5.

Kedjeregeln ger att $g'(x) = 2f(x)f'(x)$ och $g''(x) = 2f(x)f''(x) + 2(f'(x))^2$.

(a). Att f är två gånger kontinuerligt deriverbar medför enligt ovan att även g är två gånger kontinuerligt deriverbar. Därmed får vi: f konvex på $\mathbb{R} \Rightarrow f''(x) \geq 0$ för alla $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow g''(x) \geq 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$ (ty $f(x) > 0$ och $(f'(x))^2 \geq 0$) $\Rightarrow g$ konvex på $\mathbb{R}$.

(b). Tag t ex $f(x) = (x^2+1)^{2/5}$, varvid $g(x) = (x^2+1)^{4/5}$.
Rättframma kalkyler visar att $g''(x) \geq 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$, medan $f''(x) < 0$ för tillräckligt stora $x \in \mathbb{R}$. g är alltså konvex på $\mathbb{R}$ trots att inte f är det!

(c). Om $\hat{x}$ är en lokal minpunkt till $f(x)$ så finns det ett tal $\delta > 0$ sådant att $f(x) - f(\hat{x}) \geq 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$ sådana att $|x - \hat{x}| < \delta$. Men för alla dessa x gäller då också att
$h(x) - h(\hat{x}) = f(x)^2 - f(\hat{x})^2 = (f(x) - f(\hat{x}))(f(x) + f(\hat{x})) \geq 0$.
Alltså är $\hat{x}$ en lokal minpunkt även till $h(x)$.

(d). Om $\hat{x}$ är en lokal minpunkt till $h(x)$ så finns det ett tal $\delta > 0$ sådant att $h(x) - h(\hat{x}) \geq 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$ sådana att $|x - \hat{x}| < \delta$. Men för alla dessa x gäller då också att
$f(x) - f(\hat{x}) = (f(x)^2 - f(\hat{x})^2)/(f(x) + f(\hat{x})) = (h(x) - h(\hat{x}))/(f(x) + f(\hat{x})) \geq 0$.
Alltså är $\hat{x}$ en lokal minpunkt även till $f(x)$.

(e). Vi har att $x_1 = x_0 - \dfrac{f'(x_0)}{f''(x_0)}$ och $\bar{x}_1 = x_0 - \dfrac{g'(x_0)}{g''(x_0)} = x_0 - \dfrac{f(x_0)f'(x_0)}{f(x_0)f''(x_0) + (f'(x_0))^2}$,

så att $\dfrac{\bar{x}_1 - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{f(x_0)f''(x_0)}{f(x_0)f''(x_0) + (f'(x_0))^2}$ som är både > 0 och < 1

(eftersom $f(x_0)f''(x_0) > 0$ och $(f'(x_0))^2 > 0$).

Därmed gäller dels att $\bar{x}_1 - x_0$ och $x_1 - x_0$ har samma tecken, dels att $|\bar{x}_1 - x_0| < |x_1 - x_0|$.