Lösningar till 5B1712 Optimeringslära, 1 juni 2007

Uppgift 1.(a)

Inför följande variabler:

x_1 = antal enheter av produkt A som tillverkas per dag.
x_2 = antal enheter av produkt B som tillverkas per dag.
x_3 = antal enheter av produkt C som tillverkas per dag.

Täckningsbidraget per dag ges då av $12x_1 + 9x_2 + 8x_3$.

Kapacitetsbegränsningen i stansavdelningen kan skrivas $\dfrac{x_1}{2000} + \dfrac{x_2}{1600} + \dfrac{x_3}{1100} \leq 8$.

Kapacitetsbegränsningen i pressavdelningen kan skrivas $\dfrac{x_1}{1000} + \dfrac{x_2}{1500} + \dfrac{x_3}{2400} \leq 8$.

Det ger oss följande problemformulering:

$$\begin{aligned}
\text{maximera} \quad & 12x_1 + 9x_2 + 8x_3 \\
\text{då} \quad & \frac{x_1}{2000} + \frac{x_2}{1600} + \frac{x_3}{1100} \leq 8, \\
& \frac{x_1}{1000} + \frac{x_2}{1500} + \frac{x_3}{2400} \leq 8, \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

Uppgift 1.(b)

Svarande mot den givna tillåtna baslösningen får vi följande simplexmultiplikatorer u_i och v_j, beräknade mha relationen $c_{ij} = u_i - v_j$ för basvariabler samt $v_4 = 0$.

c_{ij}	kund 1	kund 2	kund 3	kund 4	u_i
fab 1	116	125	136		147
fab 2			125	136	136
fab 3				125	125
fab 4				116	116
v_j	31	22	11	0	

Därefter får vi följande reducerade kostnader r_{ij} för ickebasvariablerna, uträknade mha relationen $r_{ij} = c_{ij} - u_i + v_j$.

r_{ij}	kund 1	kund 2	kund 3	kund 4	u_i
fab 1				2	147
fab 2	4	2			136
fab 3	10	6	2		125
fab 4	16	10	4		116
v_j	31	22	11	0	

Eftersom alla $r_{ij} \geq 0$ så är den föreslagna baslösningen optimal.

Uppgift 2.(a)

Om vi inför slackvariabler x_5 och x_6, för att överföra olikhetsbivillkoren till likhetsbivillkor, så får vi ett LP-problem på standardformen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\,, \end{aligned}$$

där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{c}^\mathsf{T} = (-3,\, 4, -2,\, 5,\, 0,\, 0)$.

Startlösningen ska ha basvariablerna x_5 och x_6, dvs $\beta = (5, 6)$ och $\delta = (1, 2, 3, 4)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, medan $\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Vektorn $\mathbf{y}$ med simplexmultiplikatorerna värden erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av

$\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\delta = (-3,\, 4, -2,\, 5) - (0,\, 0) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (-3,\, 4, -2,\, 5)$.

Eftersom $r_{\delta_1} = r_1 = -3$ är minst, och < 0, ska vi låta x_1 bli ny basvariabel.

Då behöver vi beräkna vektorn $\bar{\mathbf{a}}_1$ ur systemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{a}_1$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} \\ \bar{a}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{a}}_1 = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} \\ \bar{a}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Det största värde som den nya basvariabeln x_1 kan ökas till ges av

$$t^{\max} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} \mid \bar{a}_{i1} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{8}{1}, \frac{4}{1} \right\} = \frac{4}{1} = \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{21}}.$$

Minimerande index är $i = 2$, varför $x_{\beta_2} = x_6$ inte längre får vara kvar som basvariabel. Dess plats tas av x_1.

Nu är alltså $\beta = (5, 1)$ och $\delta = (6, 2, 3, 4)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, medan $\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Vektorn $\mathbf{y}$ med simplexmultiplikatorerna värden erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av

$$\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\delta = (0,\, 4, -2,\, 5) - (0, -3) \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (3,\, 1,\, 1,\, 2).$$

Eftersom $\mathbf{r}_\delta \geq \mathbf{0}$ så är den aktuella baslösningen optimal.

Därmed är punkten $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ optimal till det ursprungliga problemet. Optimalvärdet är $z = -12$.

Uppgift 2.(b)

Antag nu att $\mathbf{c}^\mathsf{T} = (-3,\, 4, -2,\, 2,\, 0,\, 0)$ i stället för $(-3,\, 4, -2,\, 5,\, 0,\, 0)$.

Om vi startar från slutlösningen ovan, med $\beta = (5, 1)$ och $\delta = (6, 2, 3, 4)$, så gäller fortfarande att

$$\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix},\ \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Men reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges nu av

$$\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\delta = (0,\, 4, -2,\, 2) - (0, -3) \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (3,\, 1,\, 1, -1).$$

Eftersom $r_{\delta_4} = r_4 = -1$ är minst, och < 0, ska vi låta x_4 bli ny basvariabel.

Då behöver vi beräkna vektorn $\bar{\mathbf{a}}_4$ ur systemet $\mathbf{A}_\beta\bar{\mathbf{a}}_4 = \mathbf{a}_4$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{14} \\ \bar{a}_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{a}}_4 = \begin{pmatrix} \bar{a}_{14} \\ \bar{a}_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Eftersom $\bar{\mathbf{a}}_4 \leq \mathbf{0}$ så kan x_4 öka obegränsat, varvid målfunktionsvärdet går mot $-\infty$. Därmed saknar problemet ändligt optimalvärde och algoritmen avbryts.

Extra kommentar (som inte krävs):

Om man sätter $x_4 = t$ och låter t öka från 0, medan de övriga ickebasvariablerna ligger kvar vid 0, så påverkas målfunktionen enligt $z = \bar{z} + r_4 t = -12 - t$, medan basvariablernas värden påverkas enligt $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{a}}_4 t$, dvs $\begin{pmatrix} x_5 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} t$.

$$\text{Detta kan skrivas } \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{d}.$$

Då är $\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}$ och $\mathbf{x}(t) \geq \mathbf{0}$ för alla $t \geq 0$, dvs $\mathbf{x}(t)$ är en tillåten lösning för varje $t \geq 0$,

medan $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{d} = -12 - t \to -\infty$ då $t \to +\infty$.

Uppgift 2.(c)

Om primala problemet är på standardformen

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\ \text{då} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array}$$

så är det duala problemet på formen: maximera $\mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}$ då $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}$, som här blir:

$$\begin{array}{rrcrcr} \text{maximera} & 8y_1 & + & 4y_2 & & \\ \text{då} & y_1 & + & y_2 & \leq & -3, \\ & y_1 & - & y_2 & \leq & 4, \\ & -y_1 & + & y_2 & \leq & -2, \\ & -y_1 & - & y_2 & \leq & 5, \\ & y_1 & & & \leq & 0, \\ & & & y_2 & \leq & 0. \end{array}$$

Om man ritar upp det tillåtna området till detta problem i en figur med y_1 och y_2 på axlarna så ser man att det blir en femhörning med hörnen i koordinaterna $(-0.5\,,\,-2.5)$, $(\,0\,,\,-3)$, $(\,0\,,\,-4)$, $(-0.5\,,\,-4.5)$ och $(-1.5\,,\,-3.5)$.

Uppgift 2.(d)

I figuren ovan ska vi nu byta ut bivillkoret $-y_1 - y_2 \leq 5$ mot bivillkoret $-y_1 - y_2 \leq 2$.
Men då ser man direkt att det inte finns något $\mathbf{y}$ som uppfyller både $y_1 + y_2 \leq -3$ och $-y_1 - y_2 \leq 2$. (Vilket även inses om man adderar dessa båda olikheter.)
Alltså saknar det duala problemet tillåtna lösningar, vilket är vad vi väntade oss eftersom det primala problemet hade tillåtna lösningar men saknade (ändlig) optimallösning.

Uppgift 3.

Låt $\mathbf{x} = (x_{13},\, x_{14},\, x_{23},\, x_{24})^\mathsf{T} \in I\!R^4$.

Eftersom alla $R_{ij} = 1$ så är effektminimeringsproblemet ekvivalent med QP-problemet

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & \frac{1}{2}\,\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{I}\,\mathbf{x} \quad (= \text{halva värmeeffekten}) \\ \text{då} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \end{array}$$

där $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 500 \\ 100 \\ -500 \end{pmatrix}$.

Detta QP-problem är i sin tur ekvivalent med det linjära ekvationssystemet

$$\begin{array}{rcrcl} \mathbf{I}\,\mathbf{x} & - & \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} & = & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} & & & = & \mathbf{b} \end{array}$$

Ur $\mathbf{I}\,\mathbf{x} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ erhålls att $\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}$, som insatt i $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ger ekv.systemet $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{b}$.

I vårt fall är $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 500 \\ 100 \\ -500 \end{pmatrix}$.

Gauss-Jordans metod (eller Gausselimination) tillämpat på ekvationssystemet

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 100 \\ -500 \end{pmatrix}$ ger lösningen $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 150 \\ -50 \\ -200 \end{pmatrix}$.

Länkströmmarna ges sedan av $\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 150 \\ -50 \\ -200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 350 \\ 150 \\ 150 \\ -50 \end{pmatrix}$,

dvs $x_{13} = 350,\; x_{14} = 150,\; x_{23} = 150$ och $x_{24} = -50$.
Strömmen i länken $(2,4)$ går alltså från nod 4 till nod 2!

Uppgift 4.(a)

Gradienten $\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)$, där $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} = 4x_j^3 - 3x_j^2 + 2x_j - 1.$

Hessianen $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ är i detta exempel en diagonalmatris med diagonalelementen

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \ldots, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$, där $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = 12x_j^2 - 6x_j + 2.$

f är konvex på $\mathbb{R}^n$ om och endast om $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ är positivt semidefinit för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
En diagonalmatris är positivt semidefinit om och endast om alla diagonalelement är ≥ 0.

Men $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = 12(x_j^2 - \frac{1}{2}x_j + \frac{1}{6}) = 12((x_j - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16} + \frac{1}{6}) > 0$ för alla värden på x_j.

Alltså är $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ positivt definit för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, och därmed är f (strikt) konvex på $\mathbb{R}^n$.

Uppgift 4.(b)

Newtonriktningen $\mathbf{d}^{(1)}$ bestäms ur ekvationssystemet $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})\,\mathbf{d} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(1)})^\mathsf{T}$,
förutsatt att $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})$ är positivt definit, vilket vi redan konstaterat att den är.

I vårt fall är $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})$ en diagonalmatris, varför lösningen till ekvationssystemet blir

$$d_j^{(1)} = -\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^{(1)}) \Bigg/ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x^{(1)}) = -\frac{4(x_j^{(1)})^3 - 3(x_j^{(1)})^2 + 2x_j^{(1)} - 1}{12(x_j^{(1)})^2 - 6x_j^{(1)} + 2}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Eftersom $x_j^{(1)} = 1$ för alla j så blir $d_j^{(1)} = -0.25$ för alla j.

Vi prövar med steget $t_1 = 1$, så att $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + t_1\mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{d}^{(1)} = (0.75, \ldots, 0.75)^\mathsf{T}$.

Då blir $f(\mathbf{x}^{(2)}) = -\dfrac{75}{256} < 0 = f(\mathbf{x}^{(1)})$, så steget $t_1 = 1$ gick bra.

Därmed har vi utfört en fullständig iteration med Newtons metod.

Uppgift 5.(a) Problemet kan skrivas: minimera $f(\mathbf{x})$ då $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$, $i = 1, 2, 3$, där

$f(\mathbf{x}) = c_1 x_1 - 4x_2 - 2x_3$, $g_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2$, $g_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_3^2 - 2$, $g_3(\mathbf{x}) = x_2^2 + x_3^2 - 2$.

Målfunktionen är linjär och därmed konvex. Bivillkorsfunktionerna har andraderivatsmatriserna $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, som är positivt semidefinita för alla $\mathbf{x}$.

Därmed är även bivillkorsfunktionerna konvexa, varför det betraktade problemet är ett konvext optimeringsproblem. Vidare uppfyller exempelvis $\mathbf{x} = (0, 0, 0)^\mathsf{T}$ samtliga bivillkor med strikt olikhet, så det betraktade problemet är ett *regulärt* konvext problem. Det betyder att en punkt $\hat{\mathbf{x}}$ är en globalt optimal lösning till problemet om och endast om $\hat{\mathbf{x}}$ är en KKT-punkt.

Uppgift 5.(b) Lagrangefunktionen kan skrivas $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{3} y_i g_i(\mathbf{x}) =$

$= c_1 x_1 - 4x_2 - 2x_3 + y_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) + y_2(x_1^2 + x_3^2 - 2) + y_3(x_2^2 + x_3^2 - 2)$.

KKT-villkoren kan delas upp i fyra grupper enligt följande.

(KKT–1) $\partial L / \partial x_j = 0$ för $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} c_1 + 2x_1(y_1 + y_2) &= 0, \\ -4 + 2x_2(y_1 + y_3) &= 0, \\ -2 + 2x_3(y_2 + y_3) &= 0. \end{aligned}$$

(KKT–2) Tillåten punkt, dvs $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ för $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} &x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0, \\ &x_1^2 + x_3^2 - 2 \leq 0, \\ &x_2^2 + x_3^2 - 2 \leq 0. \end{aligned}$$

(KKT–3) Lagrangemultiplikatorerna icke-negativa:

$$\begin{aligned} &y_1 \geq 0, \\ &y_2 \geq 0, \\ &y_3 \geq 0. \end{aligned}$$

(KKT–4) Komplementaritetsvillkor, dvs $y_i g_i(\mathbf{x}) = 0$ för $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} &y_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) = 0, \\ &y_2(x_1^2 + x_3^2 - 2) = 0, \\ &y_3(x_2^2 + x_3^2 - 2) = 0. \end{aligned}$$

Uppgift 5.(c) Antag först att $\mathbf{x} = (1.4,\ 0.2,\ 0.2)^\mathsf{T}$.

Då är $x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$, $x_1^2 + x_3^2 - 2 = 0$, $x_2^2 + x_3^2 - 2 < 0$.

Komplementaritetsvillkoren ger då att $y_3 = 0$, varefter villkoren KKT–1 kan skrivas

$$\begin{aligned} c_1 + 2.8(y_1 + y_2) &= 0, \\ -4 + 0.4(y_1 + 0) &= 0, \\ -2 + 0.4(y_2 + 0) &= 0. \end{aligned}$$

Vi ser att detta system saknar lösning om $c_1 \neq -42$.
Om $c_1 = -42$ så uppfyller $\mathbf{x} = (1.4,\ 0.2,\ 0.2)^\mathsf{T}$, tillsammans med $\mathbf{y} = (10,\ 5,\ 0)^\mathsf{T}$, samtliga KKT-villkor, varvid $\mathbf{x}$ är en global optimallösning till problemet.

Uppgift 5.(d) Antag nu att $\mathbf{x} = (1,\, 1,\, 1)^\mathsf{T}$.

Då är $x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0,\;\; x_1^2 + x_3^2 - 2 = 0,\;\; x_2^2 + x_3^2 - 2 = 0.$

Villkoren KKT–1 kan nu skrivas

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= -0.5\, c_1, \\ y_1 + y_3 &= \;\; 2, \\ y_2 + y_3 &= \;\; 1. \end{aligned}$$

Lösningen till detta ekvationssystem i $\mathbf{y}$ blir, med utnyttjande av den givna räknehjälpen,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -0.5\, c_1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -0.5\, c_1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -c_1 + 2 \\ -c_1 - 2 \\ c_1 + 6 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att villkoren KKT–3 blir uppfyllda om och endast om $-6 \le c_1 \le -2$.

För dessa värden på konstanten c så uppfyller $\mathbf{x} = (1,\, 1,\, 1)^\mathsf{T}$, tillsammans med

$\mathbf{y} = \left(\dfrac{2 - c_1}{4}, \dfrac{-2 - c_1}{4}, \dfrac{6 + c_1}{4} \right)^\mathsf{T}$, samtliga KKT-villkor, varvid $\mathbf{x}$ är en global optimallösning.

Uppgift 5.(e) Lagrangefunktionen till problemet är nu, med $c_1 = -6$,

$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -6x_1 - 4x_2 - 2x_3 + y_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) + y_2(x_1^2 + x_3^2 - 2) + y_3(x_2^2 + x_3^2 - 2) =$

$= ((y_1 + y_2)x_1^2 - 6x_1) + ((y_1 + y_3)x_2^2 - 4x_2) + ((y_2 + y_3)x_3^2 - 2x_3) - 2(y_1 + y_2 + y_3).$

För att erhålla det duala målfunktionsvärdet $\varphi(\hat{\mathbf{y}})$, där $\hat{\mathbf{y}} = (1, 1, 1)^\mathsf{T}$,

ska man minimera $L(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}})$ med avseende på $\mathbf{x} \in I\!\!R^3$.

Men $L(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) = 2x_1^2 - 6x_1 + 2x_2^2 - 4x_2 + 2x_3^2 - 2x_3 - 6$,

så de minimerande värdena på x_j ges av

$x_1(\hat{\mathbf{y}}) = 1.5,\;\; x_2(\hat{\mathbf{y}}) = 1.0,\;\; x_3(\hat{\mathbf{y}}) = 0.5,$

och det duala målfunktionsvärdet ges av

$\varphi(\hat{\mathbf{y}}) = L(\mathbf{x}(\hat{\mathbf{y}}), \hat{\mathbf{y}}) = 4.5 - 9 + 2 - 4 + 0.5 - 1 - 6 = -13.$

Från (d)-uppgiften leds vi till gissningen att $\tilde{\mathbf{y}} = (2, 1, 0)^\mathsf{T}$ är en optimal lösning till det duala problemet.

Nu blir $L(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}) = 3x_1^2 - 6x_1 + 2x_2^2 - 4x_2 + x_3^2 - 2x_3 - 6$,

så de minimerande värdena på x_j ges av

$x_1(\tilde{\mathbf{y}}) = 1,\;\; x_2(\tilde{\mathbf{y}}) = 1,\;\; x_3(\tilde{\mathbf{y}}) = 1,$

och det duala målfunktionsvärdet ges av

$\varphi(\hat{\mathbf{y}}) = L(\mathbf{x}(\hat{\mathbf{y}}), \hat{\mathbf{y}}) = 3 - 6 + 2 - 4 + 1 - 2 - 6 = -12.$

Eftersom $\varphi(\hat{\mathbf{y}}) < \varphi(\tilde{\mathbf{y}})$ kan $\hat{\mathbf{y}}$ ej vara en optimal lösning till det duala problemet (som består i att maximera $\varphi(\mathbf{y})$ då $\mathbf{y} \ge \mathbf{0}$).