Lösningar till 5B1712 Optimeringslära, 3 juni 2006

Uppgift 1.(a)

Vi har här ett LP-problem på standardformen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\,, \end{aligned}$$

där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{c}^\mathsf{T} = (4,\ 3,\ 2,\ 3,\ 4)$.

Den givna startlösningen ska ha basvariablerna x_1 och x_5, vilket innebär att $\beta = (1, 5)$ och $\delta = (2, 3, 4)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, medan $\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$,

dvs $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 0.75 \end{pmatrix}$.

Vektorn $\mathbf{y}$ med simplexmultiplikatorerna värden erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,

dvs $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av

$\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\delta = (3,\ 2,\ 3) - (1,\ 1) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = (-1,\ -2,\ -1)$.

Eftersom $r_{\delta_2} = r_3 = -2$ är minst, och < 0, ska vi låta x_3 bli ny basvariabel.

Då behöver vi beräkna vektorn $\bar{\mathbf{a}}_3$ ur systemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{a}_3$,

dvs $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{a}}_3 = \begin{pmatrix} \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$.

Det största värde som den nya basvariabeln x_3 kan ökas till ges av

$$t^{\max} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i3}} \mid \bar{a}_{i3} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{1.25}{0.5},\ \frac{0.75}{0.5} \right\} = \frac{0.75}{0.5} = \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{23}}.$$

Minimerande index är $i = 2$, varför $x_{\beta_2} = x_5$ inte längre får vara kvar som basvariabel. Dess plats tas av x_3.

Nu är alltså $\beta = (1, 3)$ och $\delta = (2, 5, 4)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, medan $\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$,

dvs $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$.

Vektorn $\mathbf{y}$ med simplexmultiplikatorerna värden erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,

dvs $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av

$\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\delta = (3,\ 4,\ 3) - (1,\ 0) \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = (0,\ 4,\ 2).$

Eftersom $\mathbf{r}_\delta \geq \mathbf{0}$ så är den aktuella baslösningen optimal.

Därmed är punkten $x_1 = 0.5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1.5$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ optimal.

Optimalvärdet är $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = 5$.

Uppgift 1.(b)

Eftersom $r_{\delta_1} = r_2 = 0$ kan vi låta x_2 bli ny basvariabel (och öka från noll) utan att målfunktionsvärdet påverkas.

Då behöver vi beräkna vektorn $\bar{\mathbf{a}}_2$ ur systemet $\mathbf{A}_\beta\bar{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{a}_2$,

dvs $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{a}}_2 = \begin{pmatrix} \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$.

Det största värde som den nya basvariabeln x_2 kan ökas till ges av

$$t^{\max} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i2}} \mid \bar{a}_{i2} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{0.5}{0.5}, \frac{1.5}{0.5} \right\} = \frac{0.5}{0.5} = \frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{12}}.$$

Minimerande index är $i = 1$, varför $x_{\beta_1} = x_1$ inte längre får vara kvar som basvariabel. Dess plats tas av x_2.

Nu är alltså $\beta = (2, 3)$ och $\delta = (1, 5, 4)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, medan $\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\beta\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$,

dvs $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Den nya baslösning är alltså $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$.

Målfunktionsvärdet är (förstås) fortfarande $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = 5$, så även denna baslösning är optimal.

Här kan man sluta, men som kontroll kan vi fortsätta en stund till:

Vektorn $\mathbf{y}$ med simplexmultiplikatorerna värden erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,

dvs $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av

$\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\delta = (4,\ 4,\ 3) - (1,\ 0) \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} = (0,\ 4,\ 2).$

Eftersom $\mathbf{r}_\delta \geq \mathbf{0}$ så är den nya baslösningen mycket riktigt optimal.

Uppgift 1.(c)

Om primala problemet är på standardformen

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array}$$

så är det duala problemet på formen: maximera $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$ då $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}$, som utskrivet blir:

$$\begin{array}{rrcrcl} \text{maximera} & 5y_1 & + & 3y_2 & & \\ \text{då} & 4y_1 & & & \leq & 4, \\ & 3y_1 & + & y_2 & \leq & 3, \\ & 2y_1 & + & 2y_2 & \leq & 2, \\ & y_1 & + & 3y_2 & \leq & 3, \\ & & & 4y_2 & \leq & 4. \end{array}$$

Det är välkänt att en optimal lösning till detta duala problem ges av vektorn $\mathbf{y}$ med "simplexmultiplikatorerna" i optimala baslösningen i (a)-uppgiften, dvs $\mathbf{y} = (1,\, 0)^\mathsf{T}$. Man kontrollerar snabbt att detta är en tillåten lösning till det duala problemet ovan. Vidare är duala målfunktionsvärdet $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y} = 5y_1 + 3y_2 = 5 - 0 = 5 =$ optimalvärdet för det primala problemet i (a)-uppgiften.

Uppgift 2.(a)

För enkelhets skull multiplicerar vi målfunktionen med faktorn $\frac{1}{2}$, vilket inte påverkar optimala lösningen $\mathbf{x}$ till problemet. Då blir målfunktionen

$\frac{1}{2}\,(\mathbf{x}-\mathbf{q})^{\mathsf{T}}(\mathbf{x}-\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\,\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{I}\,\mathbf{x} - \mathbf{q}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\,\mathbf{q}^{\mathsf{T}}\mathbf{q},$

så problemet P1 är ekvivalent med ett kvadratiskt optimeringsproblem med linjära likhetsbivillkor på formen

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & \frac{1}{2}\,\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} + c_0 \\ \text{då} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \end{array}$$

där $\mathbf{H} = \mathbf{I}$ (4×4), $\mathbf{c} = -\mathbf{q}$, $c_0 = \frac{1}{2}\,\mathbf{q}^{\mathsf{T}}\mathbf{q}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Matrisen $\mathbf{H} = \mathbf{I}$ är positivt definit, så vi har ett *konvext* QP-problem.

Optimalitetsvillkoren ges då av $\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} = -\mathbf{c}$ och $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dvs

$\mathbf{x} - \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} = \mathbf{q}$ och $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

De första ekvationerna ger att $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} + \mathbf{q}$, som insatt i $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ger ekvationssystemet

$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} = -\mathbf{A}\mathbf{q}$, dvs $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}$, med lösningen $\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Optimala lösningen $\hat{\mathbf{x}}$ ges sedan av $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{q} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Uppgift 2.(b)

Sätt in $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{v}$ i målfunktionen, som då blir följande kvadratiska funktion, efter multiplikation med faktorn $\frac{1}{2}$:

$f(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\,(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} - \mathbf{q})^{\mathsf{T}}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} - \mathbf{q}) = \frac{1}{2}\,\mathbf{v}^{\mathsf{T}}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}})\mathbf{v} - (\mathbf{A}\mathbf{q})^{\mathsf{T}}\mathbf{v} + \frac{1}{2}\,\mathbf{q}^{\mathsf{T}}\mathbf{q}.$

$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ är positivt definit.

$f(\mathbf{v})$ är därmed en strikt konvex kvadratisk funktion som minimeras då dess gradient är nollvektorn dvs då $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{0}$. Detta ger ekvationssystemet

$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{q}$, dvs $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, med lösningen $\hat{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Optimala lösningen $\hat{\mathbf{x}}$ ges sedan av $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Man kan notera att optimalt $\mathbf{x}$ till P1 och optimalt $\mathbf{x}$ till P2 är ortogonala samt summerar sig till $\mathbf{q}$. Detta är förstås ingen överraskning eftersom de båda underrummen $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ och $\mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$ är varandras ortogonala komplement.

Uppgift 3.

Det finns flera sätt att lösa problemet. Här följer ett av dessa.

Problemet är ett konvext QP-problem, och därmed är KKT-villkoren både nödvändiga och tillräckliga villkor för en global optimallösning.

Lagrangefunktionen till problemet kan skrivas:

$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 - x_1 - x_2 + c_3 x_3 + y_1(4 - x_1 - x_2) + y_2(4 - x_1 - x_3) + y_3(4 - x_2 - x_3)$.

KKT-villkoren blir då:

$$\begin{array}{rll}
x_1 - y_1 - y_2 = 1 & \partial L/\partial x_1 = 0 & \text{(KKT1)} \\
x_2 - y_1 - y_3 = 1 & \partial L/\partial x_2 = 0 & \text{(KKT2)} \\
x_3 - y_2 - y_3 = -c_3 & \partial L/\partial x_3 = 0 & \text{(KKT3)} \\
x_1 + x_2 \geq 4 & \text{primal tillåtenhet} & \text{(KKT4)} \\
x_1 + x_3 \geq 4 & \text{primal tillåtenhet} & \text{(KKT5)} \\
x_2 + x_3 \geq 4 & \text{primal tillåtenhet} & \text{(KKT6)} \\
y_1 \geq 0 & \text{dual tillåtenhet} & \text{(KKT7)} \\
y_2 \geq 0 & \text{dual tillåtenhet} & \text{(KKT8)} \\
y_3 \geq 0 & \text{dual tillåtenhet} & \text{(KKT9)} \\
y_1(x_1 + x_2 - 4) = 0 & \text{komplementaritet} & \text{(KKT10)} \\
y_2(x_1 + x_3 - 4) = 0 & \text{komplementaritet} & \text{(KKT11)} \\
y_3(x_2 + x_3 - 4) = 0 & \text{komplementaritet} & \text{(KKT12)}
\end{array}$$

(a). Med $\mathbf{x} = (2, 2, 2)^{\mathsf{T}}$ uppfylls (KKT4)–(KKT6) med likhet, och därmed är (KKT10)–(KKT12) uppfyllda. (KKT1)–(KKT3) ger då (efter att man löst ett ekvationssystem) att $y_1 = -c_3/2$ och $y_2 = y_3 = 1 + c_3/2$. För att (KKT7)–(KKT9) ska bli uppfyllda krävs att $-2 \leq c_3 \leq 0$.
KKT-villkoren är alltså uppfyllda om och endast om $c_3 \in [-2, 0]$.

(b). Med $\mathbf{x} = (2, 2, 4)^{\mathsf{T}}$ uppfylls (KKT4) med likhet och (KKT5)–(KKT6) med strikt olikhet. Därmed är (KKT10) uppfyllt, medan (KKT11)–(KKT12) kräver att $y_2 = y_3 = 0$. (KKT1)–(KKT2) ger då att $y_1 = 1$, och för att (KKT3) ska vara uppfyllt måste $c_3 = -4$. även (KKT7)–(KKT9) är då uppfyllda.
KKT-villkoren är alltså uppfyllda om och endast om $c_3 = -4$.

(c). Med $\mathbf{x} = (3, 3, 1)^{\mathsf{T}}$ uppfylls (KKT5)–(KKT6) med likhet och (KKT4) med strikt olikhet. Därmed är (KKT11)–(KKT12) uppfyllda, medan (KKT10) kräver att $y_1 = 0$. (KKT1)–(KKT2) ger då att $y_2 = y_3 = 2$, så för att (KKT3) ska vara uppfyllt måste $c_3 = 3$. även (KKT7)–(KKT9) är då uppfyllda.
KKT-villkoren är alltså uppfyllda om och endast om $c_3 = 3$.

Uppgift 4.(a)

Eftersom $f(\mathbf{x}) = (x_1 x_2^2 x_3^3)^2$ så är $f(\mathbf{x}) \geq 0$ för alla $\mathbf{x}$. Men $\hat{\mathbf{x}}$ är en tillåten lösning med $f(\hat{\mathbf{x}}) = 0$. Alltså är $f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x})$ för alla tillåtna lösningar $\mathbf{x}$, vilket per definition innebär att $\hat{\mathbf{x}}$ är en globalt optimal lösning till minimeringsproblemet.

Uppgift 4.(b)

Varje globalt optimal lösning är även en lokalt optimal lösning, så $\hat{\mathbf{x}}$ är en lokalt optimal lösning till minimeringsproblemet.

Uppgift 4.(c)

f är konvex om $f(t\mathbf{u} + (1-t)\mathbf{v}) \leq t f(\mathbf{u}) + (1-t) f(\mathbf{v})$ för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in I\!R^3$ och $t \in [0, 1]$.
Låt (exempelvis) $\mathbf{u} = (1, 0, 1)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{v} = (1, 1, 0)^{\mathsf{T}}$, $t = 0.5$.
Då är $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) = 0$ medan $f(t\mathbf{u} + (1-t)\mathbf{v}) > 0$. f är alltså inte konvex.

Uppgift 4.(d)

Man inser att största värdet som $f(x)$ kan anta i enhetssfären är strikt positivt, dvs alla tre variablerna är nollskilda i maxpunkten/maxpunkterna.
Eftersom $(-x_1)^2 = (+x_1)^2$, $(-x_2)^4 = (+x_2)^4$ och $(-x_3)^6 = (+x_3)^6$ så kan vi utan inskränkning anta att alla tre variablerna är strikt positiva.

Att maximera $f(x)$ är då ekvivalent med att maximera $\ln(f(x)) = 2\ln(x_1) + 4\ln(x_2) + 6\ln(x_3)$ (som är en konkav funktion!) under bivillkoret $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$ och det implicita kravet att variablerna ska vara positiva.

Detta är i sin tur ekvivalent med att *minimera* $-2\ln(x_1) - 4\ln(x_2) - 6\ln(x_3)$ (som är en konvex funktion!) under bivillkoret $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$ och det implicita kravet att variablerna ska vara positiva.

KKT-villkoren, eller Lagrangerelaxering, ger att $\mathbf{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\mathsf{T}}$ är optimal.

Därmed har vi 8 st maxpunkter till $f(x)$ i enhetssfären: $\mathbf{x} = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\mathsf{T}}$.

Uppgift 5.

Här kommer ett exempel på en LP-formulering.

Först väljer vi följande variabler:

Låt x_j beteckna antalet ton som tillverkas på normal arbetstid under månad j.

Låt y_j beteckna antalet ton som tillverkas på övertid under månad j.

Låt z_j beteckna antalet ton som levereras till kunden i slutet av månad j.

Låt s_j beteckna antalet ton som ligger i lagret under månad j.

Låt u_j beteckna antalet ton som man är "skyldig" kunden i början av månad j (ej inkluderande p_j, p_{j+1} etc.).

Då kan målfunktionen, som ska minimeras, skrivas

$$\sum_{j=1}^{3}(c\,x_j + d\,y_j + \ell\,s_j + f u_j).$$

Bivillkoren som måste uppfyllas är följande:

$s_1 = 0,\ \ u_1 = 0,$

$x_1 + y_1 - z_1 - s_2 = 0,$

$x_2 + y_2 - z_2 + s_2 - s_3 = 0,$

$x_3 + y_3 - z_3 + s_3 = 0,$

$z_1 + u_2 = p_1,$

$z_2 + u_3 - u_2 = p_2,$

$z_3 - u_3 = p_3,$

$x_j \leq a$ och $y_j \leq b$ för $j = 1, 2, 3,$

samt att alla variabler måste vara ≥ 0.

Om man vill kan man eliminera variablerna z_j, varvid bivillkoren i stället blir:

$s_1 = 0,\ \ u_1 = 0,$

$x_1 + y_1 + u_2 - s_2 = p_1,$

$x_2 + y_2 + u_3 - u_2 + s_2 - s_3 = p_2,$

$x_3 + y_3 - u_3 + s_3 = p_3,$

$u_2 \leq p_1,$

$u_3 - u_2 \leq p_2,$

$x_j \leq a$ och $y_j \leq b$ för $j = 1, 2, 3,$

samt att alla variabler måste vara ≥ 0.