

Formelblad som delas ut på tentan i 5B1712, vt2007

Observera att det ej är tillåtet att använda räknare på tentan!

$$\mathcal{R}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\top), \quad \mathcal{R}(\mathbf{A}^\top)^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}), \quad \mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{R}(\mathbf{A}^\top), \quad \mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)^\perp = \mathcal{R}(\mathbf{A}).$$

Simplexmetoden för LP-problem på standardform:

$$\mathbf{A}_\beta = [\mathbf{a}_{\beta_1} \cdots \mathbf{a}_{\beta_m}], \quad \mathbf{A}_\delta = [\mathbf{a}_{\delta_1} \cdots \mathbf{a}_{\delta_\ell}], \quad \mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}, \quad \bar{z} = \mathbf{c}_\beta^\top \bar{\mathbf{b}}, \quad \mathbf{A}_\beta^\top \mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta, \quad \mathbf{r}_\delta^\top = \mathbf{c}_\delta^\top - \mathbf{y}^\top \mathbf{A}_\delta.$$

Färdiga om $\mathbf{r}_\delta \geq \mathbf{0}$. Annars, välj ett q med $r_{\delta_q} < 0$. $k = \delta_q$, $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_k = \mathbf{a}_k$, $x_k = t$,

$$z = \bar{z} + r_k t, \quad \mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{a}}_k t, \quad t^{\max} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_p}{\bar{a}_{pk}}. \text{ Låt } \delta_q \text{ och } \beta_p \text{ byta plats.}$$

Duala problemet till allmänt LP-problem:

$$\begin{array}{ll} \text{minimera} & \mathbf{c}_1^\top \mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2^\top \mathbf{x}_2 \\ \text{då} & \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12} \mathbf{x}_2 \geq \mathbf{b}_1, \\ & \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22} \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2, \\ & \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_2 \text{ fri.} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{maximera} & \mathbf{b}_1^\top \mathbf{y}_1 + \mathbf{b}_2^\top \mathbf{y}_2 \\ \text{då} & \mathbf{A}_{11}^\top \mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{21}^\top \mathbf{y}_2 \leq \mathbf{c}_1, \\ & \mathbf{A}_{12}^\top \mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{22}^\top \mathbf{y}_2 = \mathbf{c}_2, \\ & \mathbf{y}_1 \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}_2 \text{ fri.} \end{array}$$

QP med likhetsbivillkor: minimera $\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ då $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Z} \hat{\mathbf{v}}, \quad (\mathbf{Z}^\top \mathbf{H} \mathbf{Z}) \hat{\mathbf{v}} = -\mathbf{Z}^\top (\mathbf{H} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c}), \quad \begin{bmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{A}^\top \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{c} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

MN-lösning till MK-problem: $\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$, $\mathbf{p} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}}$, $\mathbf{A} \mathbf{A}^\top \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{p}$, $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\top \hat{\mathbf{u}}$.

Newton: $\nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{d} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^\top$ ger $\mathbf{d}^{(k)}$ om $\nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k)})$ är pd. $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + t_k \mathbf{d}^{(k)}$.

Ickelinjär MK: minimera $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (h_i(\mathbf{x}))^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|^2$, där $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$.

Gauss-Newton: $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^{(k)})^\top \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{d} = -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^{(k)})^\top \mathbf{h}(\mathbf{x}^{(k)})$ ger $\mathbf{d}^{(k)}$. $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + t_k \mathbf{d}^{(k)}$.

QP med olikhetsbivillkor: minimera $\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ då $\mathbf{A} \mathbf{x} \geq \mathbf{b}$.

Optimalitetsvillkor: $\mathbf{H} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \mathbf{A}^\top \hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{b}$, $\hat{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{y}}^\top (\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) = 0$.

Steg 1: Givet $\bar{\mathbf{x}}$ och (α, γ) med $\mathbf{A}_\alpha \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}_\alpha$ och $\mathbf{A}_\gamma \bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{b}_\gamma$, finns $\bar{\mathbf{u}}$ så att $\mathbf{H} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \mathbf{A}_\alpha^\top \bar{\mathbf{u}}$?

Om JA, gå till Steg 2. Om NEJ, gå till Steg 3.

Steg 2: Om $\bar{\mathbf{u}} \geq \mathbf{0}$, STOPP. Annars, välj ett q med $\bar{u}_q < 0$ och flytta över α_q till γ -vektorn.

Steg 3: Bestäm $\hat{\mathbf{d}}$ ur problemet: minimera $\frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{H} \mathbf{d} + (\mathbf{H} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c})^\top \mathbf{d}$ då $\mathbf{A}_\alpha \mathbf{d} = \mathbf{0}$.

Om $\mathbf{A}_\gamma (\bar{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{d}}) \geq \mathbf{b}_\gamma$, ändra $\bar{\mathbf{x}}$ till $\bar{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{d}}$ och gå till Steg 1.

$$\text{Annars, låt } \mathbf{s} = \mathbf{A}_\gamma \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}_\gamma, \quad \mathbf{g} = \mathbf{A}_\gamma \hat{\mathbf{d}}, \quad \hat{t} = \min_i \left\{ \frac{s_i}{-g_i} \mid g_i < 0 \right\} = \frac{s_p}{-g_p}.$$

Ändra $\bar{\mathbf{x}}$ till $\bar{\mathbf{x}} + \hat{t} \cdot \hat{\mathbf{d}}$ och flytta över γ_p till α -vektorn. Gå till Steg 1.

Ickelinjär optimering under olikhetsbivillkor: minimera $f(\mathbf{x})$ då $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$.

KKT-villkoren: $\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_i \hat{y}_i \nabla g_i(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}^\top$, $g_i(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0$, $\hat{y}_i \geq 0$, $\hat{y}_i g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0$.

Lagrangerelaxering: minimera $f(\mathbf{x})$ då $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$ och $\mathbf{x} \in X$.

$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{y}^\top \mathbf{g}(\mathbf{x})$, $\varphi(\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{x} \in X} L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) \in X \times \mathbb{R}^m$ uppfyller GOV om

$$L(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) = \varphi(\hat{\mathbf{y}}), \quad \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}) \leq \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{y}}^\top \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}) = 0.$$