KTH Matematik

Tentamen, del 1
Tentamen Maj 2018
SF1547 Numeriska metoder
Måndag 28e maj 2018 kl 8.00-11.00

Namn: ....

Personnummer:... **Program och årskurs:** ....

Max antal poäng är 20. Gränsen för godkänt/betyg E är 14 poäng (inklusive bonuspoäng). Endast ett korrekt svar per uppgift. Om denna del av tentamen (del 1) blir godkänd så rättas även del 2, vilket ger möjlighet till högre betyg.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).
Markera svaren på dessa papper. Skriv namn och personnummer på varje sida.

Bonus. Skriv bonuspoäng från VT18 här: .... (max=4)
Wiki-Bonus. Wiki-bonuspoäng (endast giltiga för A,B på del 2): ....(max=1)
Endast för statistisk, ej bedömning. Jag gick på föreläsningar ☐ De flesta ☐ Några ☐ Inga

---

1. (2p) Låt Ω vara ett stabilitetsområde för en given ODE-metod med steglängd h. Vilket påstående **stämmer inte**?

- ☐ Metoden tillämpad på ODEn $y'(t) = -y(t)$ är stabil om $-h \in \Omega$.
- ☐ Metoden tillämpad på ODEn $y'(t) = -ty(t)$ är stabil om $-h \in \Omega$.
- ☐ Stabilitetsområdet för Euler framåt inkluderar punkten -1.
- ☐ Stabilitetsområdet för Euler bakåt inkluderar punkten -1.
- ☐ Euler bakåt är stabil för ODEn $y'(t) = -ty(t)$, $y(0) = 3$, $t \geq 0$.
- ☐ Euler bakåt är stabil för $y'(t) = -1.5y(t)$ om $h = 2$.
- ☒ Euler framåt är stabil för $y'(t) = -1.5y(t)$ om $h = 2$.

2. (2p) Vi vill approximera $\int_{-1}^{1} x^3\,dx$ med trapetsregeln. Vi använder 5 intervall och får approximationen

☒ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 9	☐ 12	☐ 24	☐ 27	☐ 100
	☐ -1	☐ -2	☐ -3	☐ -9	☐ -12	☐ -24	☐ -27	☐ -100
		☐ $\frac{1}{2}$	☐ $\frac{1}{3}$	☐ $\frac{1}{9}$	☐ $\frac{1}{12}$	☐ $\frac{1}{24}$	☐ $\frac{1}{27}$	☐ $\frac{1}{100}$
		☐ $-\frac{1}{2}$	☐ $-\frac{1}{3}$	☐ $-\frac{1}{9}$	☐ $-\frac{1}{12}$	☐ $-\frac{1}{24}$	☐ $-\frac{1}{27}$	☐ $-\frac{1}{100}$
							☐ Något annat	

3. (2p) Vad blir två steg av Euler framåt tillämpat på differentialekvationen $y'(t) - y(t) - 3 = 0$, $y(0) = 0$ med steglängd $h = 1$?

☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☒ 9	☐ 12	☐ 24	☐ 27	☐ 100
	☐ -1	☐ -2	☐ -3	☐ -9	☐ -12	☐ -24	☐ -27	☐ -100
		☐ $\frac{1}{2}$	☐ $\frac{1}{3}$	☐ $\frac{1}{9}$	☐ $\frac{1}{12}$	☐ $\frac{1}{24}$	☐ $\frac{1}{27}$	☐ $\frac{1}{100}$
		☐ $-\frac{1}{2}$	☐ $-\frac{1}{3}$	☐ $-\frac{1}{9}$	☐ $-\frac{1}{12}$	☐ $-\frac{1}{24}$	☐ $-\frac{1}{27}$	☐ $-\frac{1}{100}$

4. (3p) Vi tillämpar Newtons metod i flera variabler på problemet $f_1(x,y) = x^2+(y-1)^2+1 = 0$ och $f_2(x,y) = y^2+y+\heartsuit = 0$ och får med startgissning $x_0 = -1/2$ och $y_0 = 1$ värden $x_1 = 3/4$ och $y_1 = 2/3$. Vad ska $\heartsuit$ vara?

☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 9	☐ 12	☐ 24	☐ 27	☐ 100
	☒ -1	☐ -2	☐ -3	☐ -9	☐ -12	☐ -24	☐ -27	☐ -100
		☐ $\frac{1}{2}$	☐ $\frac{1}{3}$	☐ $\frac{1}{9}$	☐ $\frac{1}{12}$	☐ $\frac{1}{24}$	☐ $\frac{1}{27}$	☐ $\frac{1}{100}$
		☐ $-\frac{1}{2}$	☐ $-\frac{1}{3}$	☐ $-\frac{1}{9}$	☐ $-\frac{1}{12}$	☐ $-\frac{1}{24}$	☐ $-\frac{1}{27}$	☐ $-\frac{1}{100}$

5. (2p) Volymen av en ellipsoid är $V = \frac{4}{3}\pi abc$, där a, b och c är de tre axlarnas längd. Vi har mätt upp $a \approx 1$, $b \approx 1$ och $c \approx 1$. Vi vet absolufelgränser för a och b: $E_a = 0.01$ och $E_b = 0.01$. Vi vill ha en absolutfelgräns för volymen: $E_V = \frac{1}{5} \cdot \frac{\pi}{3} \approx 0.2$. Vad blir absolutfelgränsen E_c om man använder uppskattning enligt allmänna felfortplantningsformeln?

☐ 0	☐ 1	☐ 0.1	☐ 0.01	☐ 2	☐ 0.2	☐ 0.02	☐ 3	☐ 0.3	☒ 0.03
	☐ 4	☐ 0.4	☐ 0.04	☐ 5	☐ 0.5	☐ 0.05	☐ 6	☐ 0.6	☐ 0.06
	☐ 7	☐ 0.7	☐ 0.07	☐ 8	☐ 0.8	☐ 0.08	☐ 9	☐ 0.9	☐ 0.09

6. (3p) Annika vill lösa ett linjärt ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Beräkning av ett element i vektorn $\mathbf{b}$ görs med ett komplicerat program och tar 0.04 sekunder. Hon har en naiv version av gausseliminering tillgänglig, och när hon löser ett ekvationssystem med den naiva lösaren för en $n \times n$-matris med $n = 100$ tar beräkningen 1 sekund (exklusive beräkning av $\mathbf{b}$). Hon vill nu balansera beräkningarna, så att beräkningen av $\mathbf{b}$ tar ungefär lika lång tid som lösningen av ekvationssystemet. Hur stort n ska hon välja? Gör uppskattningar med flop-count och det förenklande antagandet att $\mathcal{O}(n^\square)$ kan ersättas med $\alpha n^\square$.

☐ 10	☐ 20	☐ 40	☐ 60	☐ 80	☒ 200	☐ 400	☐ 600
☐ 800	☐ 1000	☐ 1200	☐ 1400	☐ 1600	☐ 1800	☐ 2000	☐ 4000

7. (2p) Vi vill lösa följande randvärdesproblem $y''(x) = 2y - 1$ och $y(0) = y(1) = 0$ och skriver följande program med resultatutskrift till höger.

```
a=0; b=1; N=9; h=(b-a)/(N+1);
A=zeros(N,N);
for k=1:N
    A(k,k)=-2-2*h^2;
    if (k<N)
        A(k+1,k)=1;
        A(k,k+1)=1;
    end
end
b=-ones(N,1)*h^2;
u=A\b
```

```
u =
    0.0381
    0.0670
    0.0873
    0.0993
    0.1032
    0.0993
    0.0873
    0.0670
    0.0381
```

Vad är $y''(0.5)$ ungefär enligt denna approximation?

☐ 0	☐ -1	☐ -0.1	☐ -0.01	☐ -2	☐ -0.2	☐ -0.02	☐ -3	☐ -0.3	☐ -0.03
	☐ -4	☐ -0.4	☐ -0.04	☐ -5	☐ -0.5	☐ -0.05	☐ -6	☐ -0.6	☐ -0.06
	☐ -7	☐ -0.7	☐ -0.07	☐ -8	☒ -0.8	☐ -0.08	☐ -9	☐ -0.9	☐ -0.09

8. (2p) Det totala felet (dvs kombinationen av avrundningsfel och diskretiseringsfel) i en viss differensapproximation är $E(h) = \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{h}\varepsilon_{\text{mach}}$. För ♡ är avrundningsfelet störst. För ♠ är diskretiseringsfelet störst. När $h \approx$ ♢ är de ungefär lika stora. Vad är ♡, ♠ och ♢?

- [ ] ♡=små h, ♠=stora h, ♢ $= \varepsilon_{\text{mach}}$
- [ ] ♡=stora h, ♠=små h, ♢ $= \varepsilon_{\text{mach}}$
- [ ] ♡=små h, ♠=stora h, ♢ $= \varepsilon_{\text{mach}}^{1/2}$
- [ ] ♡=stora h, ♠=små h, ♢ $= \varepsilon_{\text{mach}}^{1/2}$
- [x] ♡=små h, ♠=stora h, ♢ $= \varepsilon_{\text{mach}}^{1/3}$
- [ ] ♡=stora h, ♠=små h, ♢ $= \varepsilon_{\text{mach}}^{1/3}$

9. (2p)
Programmet till höger är en kombination av flera metoder från kursen. Vilken metod/teknik **används inte**?

```
g=@(y) [y(2);y(1)+y(2)];
N=10; h=1/N; y=[1;0];
T=y(1)*0.5;
for k=1:N
    y=y+h*g(y);
    T=T+y(1);
end
T=h*(T-y(1)/2);
```

- [ ] en metod med absolutfel med noggrannhetsordning ett
- [ ] en metod med absolutfel med noggrannhetsordning två
- [ ] sammansatta trapetsregeln
- [ ] en explicit metod
- [ ] en lösningsmetod för andra ordningens begynnelsevärdesproblem
- [ ] Euler framåt
- [x] en ODE-metod med globalt fel $\mathcal{O}(h^2)$
- [ ] en metod som kan härledas från Taylorutveckling
- [ ] en metod som löser $y''(t) - y(t) - y'(t) = 0$ med lämpliga begynnelsevärden