Laboration 3 i SF1544/BE3003: Konstruera en optimal balk

Avsikten med denna laboration är att:

- träna på matlabprogrammering (uttnyttja gärna alla schemalagda laborationstillfällen),
- öva på numerisk lösning av differentialekvationer med Matlab,
- lösa ett optimeringsproblem med en differentialkekvation som bivillkor,
- repetera och hantera metoden med Lagrangefunktioner för att lösa optimeringsproblem med bivillkor
- studera ett exempel när en differentialekvation används för att bestämma koefficienter i ekvationen, d.v.s. lösa ett inverst problem.

Frågorna nedan, som inte alltid precist formulerade, ska ses som en vägledning för att skriva en laborationsrapport.

1. Betrakta utböjningen $u(x)$ av en fritt upplagd balk som löser Bernoulli-Eulers ekvation

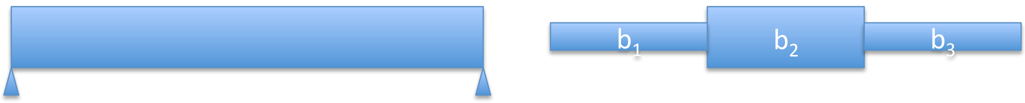
$$\begin{aligned} \big(b(x)u''(x)\big)'' &= f(x), \quad x \in (0,1) \\ u(1) = b(1)u''(1) &= u(0) = b(0)u''(0) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

med böjstyvheten $b(x)$ och kraften $f(x)$ per längdenhet. Denna ekvation kan skrivas som ett system

$$\begin{aligned} w''(x) &= f(x) \quad x \in (0,1), w(0) = w(1) = 0 \\ b(x)u''(x) &= w(x) \quad x \in (0,1), u(0) = u(1) = 0. \end{aligned}$$

Anta att böjstyvheten b är styckvis konstant

$$b(x) = \begin{cases} b_1 & x < 1/3 \\ b_2 & 1/3 \le x \le 2/3 \\ b_3 & x > 2/3. \end{cases}$$



Fritt upplagd balk med styckvis varierande bredd: från sidan (vänster) och uppifrån (höger).

Målet är att välja parametrarna $b_1 > 0$ och $b_2 > 0$ med $b_3 = 1 - b_2 - b_1 > 0$ så att

utböjningen $u(x_*)$ minimeras,

där x_* är en position i balken: testa $x_* = 1/2$ och $x_* = 1/10$. Vi kan tolka bivillkoret $b_1+b_2+b_3 = 1$ som att vi har en given mängd material att göra vår balk av, med varierande bredd och konstant höjd.

1a. Låt U_n vara en approximation av $u(x_n)$ för indelningen $x_n = n\Delta x,\ n = 0, 1, 2, \ldots, N,\ \Delta x = 1/N$, och approximera andraderivatan med den vanliga andradifferensen

$$(D^2U)_n := (U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1})/(\Delta x)^2 \text{ för } n = 1, \ldots N - 1.$$

En approximation av differentialekvationen är differensekvationen

$$(D^2BD^2U)_n = F_n, \quad n = 1, \ldots, N-1, \quad (D^2U)_0 = (D^2U)_N = 0,\ U_0 = U_N = 0 \tag{2}$$

som kan skrivas

$$\begin{aligned}(D^2W)_n &= F_n \quad n=1,\dots,N-1, \quad W_0 = W_N = 0\\ B_n(D^2U)_n &= W_n \quad n=1,\dots,N-1, \quad U_0 = U_N = 0\end{aligned} \tag{3}$$

med

$$B_n = \begin{cases} b_1 & x_n < 1/3\\ b_2 & 1/3 \le x_n \le 2/3\\ b_3 & x_n > 2/3\end{cases}$$

och vi kan tolka D^2U som en matris vektor multiplikation, med den tridiagonala $(N-1)\times(N-1)$ matrisen som har $-2/(\Delta x)^2$ i huvuddiagonalen och $1/(\Delta x)^2$ i övre och undre diagonalen,

$$D^2 = \frac{1}{(\Delta x)^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots\\ & & & 1 & -2\end{bmatrix}.$$

Vi ska nu minimera utböjningen $U(x_{n_*})$ (där t.ex. $x_{n_*} = 1/2$) under bivillkoret att ekvationen (2) är uppfylld. Det är användbart att studera Lagrangefunktionen $L : \mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definierad av

$$L(U,\Lambda,b) := \sum_{n=1}^{N-1}\big(U(x_{n_*})\delta_{nn_*}(\Delta x)^{-1} + (F - D^2BD^2U)_n\Lambda_n\big)\Delta x,$$

där

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1 & n = k\\ 0 & n \neq k\,.\end{cases}$$

Här är B diagonalmatrisen med B_n i diagonalen,

$$B = \mathrm{diag}(B_n) = \begin{bmatrix} b_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & b_2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1-b_2-b_1 & \\ & & & & & \ddots\end{bmatrix}. \tag{4}$$

Låt $G_n := \delta_{nn_*}(\Delta x)^{-1}$ och skriv skalärprodukten i $\mathbb{R}^{N-1}$ som $G\cdot U = \sum_{n=1}^{N-1} G_nU_n$. Förklara varför Lagrangefunktionen satisfierar

$$L(U,\Lambda,b) = \big(G\cdot U + F\cdot\Lambda - BD^2U\cdot D^2\Lambda\big)\Delta x$$

och ger ekvationerna

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial \Lambda_n} L(U,\Lambda,B) = \big(F_n - (D^2BD^2U)_n\big)\Delta x,\ \ n=1,\ldots,N-1,\\
0 &= \frac{\partial}{\partial U_n} L(U,\Lambda,B) = \big(G_n - (D^2BD^2\Lambda)_n\big)\Delta x,\ \ n=1,\ldots,N-1,\\
0 &= \frac{\partial}{\partial b_i} L(U,\Lambda,B) = \big(- \frac{\partial B}{\partial b_i} D^2U \cdot D^2\Lambda\big)\Delta x, \quad i=1,2.
\end{aligned} \tag{5}
$$

1b. Vi ser att $U \in \mathbb{R}^{N-1}$ löser (2) och $\Lambda \in \mathbb{R}^{N-1}$ löser motsvarande ekvation med högerledet G istället för F och $\bar{W} \in \mathbb{R}^{N-1}$

$$
\begin{aligned}
(D^2\bar{W})_n &= G_n \quad n=1,\ldots,N-1,\\
B_n(D^2\Lambda)_n &= \bar{W}_n \quad n=1,\ldots,N-1.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Ekvationssystemet (5) kan lösas iterativt. För ett iterationssteg, $m = 1,2,\ldots$, och en given böjstyvhetsmatris $B = B^m$ kan differensekvationen (3) lösas och ger $U = U^m$. På samma sätt erhålls $\Lambda = \Lambda^m$ från (6) med $B = B^m$. Bestäm sedan b_i till exempel genom att implementera iterationer med gradientmetoden i Matlab:

$$
b_i^{m+1} = b_i^m - \alpha \frac{\partial}{\partial b_i} L(U^m,\Lambda^m,B^m) \quad i=1,2,
$$

där $\alpha > 0$ väljs lämpligt litet (för att iterationerna ska konvergera och $b_i > 0$), prova t.ex. $\alpha = 0.5$; $U^m \in \mathbb{R}^{N-1}$ är lösningen till (3) med $B = B^m$ och $\Lambda = \Lambda^m \in \mathbb{R}^{N-1}$ löser (6). Variabeln b_3 elimineras enligt $b_3 = 1 - b_1 - b_2$. Välj t.ex. en jämt fördelad last $f(x) = 1$. Notera att L ska deriveras med avseende på diagonalelementen i (4). Välj punkten $x_{n_*} = 1/2$, och $x_{n_*} = 0.2$; hur skiljer sig den optimal balken åt i de två fallen? Visa gärna en figur som illustrerar den optimal balkens bredd.

1c. Testa numeriskt noggrannheten av approximationen (2) till (1) (hur?). Beskriv de felkällor din lösning av optimal balk har och jämför felens storlek. Gör experimentell störningsanalys. Är stora konditionstal inblandade? Motivera noggrannheten du ser. Hur kan noggrannheten testas utan att ha tillgång till en exakt lösning?

1d. Denna uppgift behöver ej göras för att laborationen ska godkännas. Generalisera uppgift 1a-c till en balk med styckvis konstant böjstyvhet i M lika stora sektioner och genomför approximationen i uppgift 1b med t.ex $M = 9$. Jämför slutsatserna i uppgift 1c med detta fall. Nu behövs mindre α och fler antal iterationer.