Institutionen för Matematik, KTH

Tentamen del 2
Numeriska metoder SF1544 och BE3003
8.00-11.00 16/3 2018

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Del 2 rättas bara om Del 1 i denna tentamen eller kontrollskrivningen den 1/3 2018 är godkänd.

Betygsgränser: D 10, C 20, B 30 och A 40 poäng.

Det finns två alternativa uppgifter 2; bara en av dem får lämnas in.

1a. (5p) Temperaturen $u(x)$ i en stav vid positionen x, $0 < x < 1$, med längd 1 uppfyller randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} -u''(x) + u(x) &= x\,, \quad 0 < x < 1\,, \\ u(0) &= 0\,, \\ u(1) &= 2\,. \end{aligned}$$

Formulera en finit differensmetod för att approximera funktionen u.

1b. (10p) Skriv ett Matlabprogram som utför approximationen i uppgift 1a.

1a. Låt $x_n = n\Delta x$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N+1$ vara en indelning av intervallet $[0,1]$, där $\Delta x = 1/(N+1)$, och approximera med differenskvoten

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} u(x_n) &\simeq \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n+1}}{(\Delta x)^2}\,, \\ u(x_n) &\simeq u_n. \end{aligned}$$

Differensapproximation ger differensekvationerna

$$\begin{aligned} -\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n+1}}{(\Delta x)^2} + u_n &= x_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, N, \\ u_0 &= 0, \\ u_{N+1} &= 2. \end{aligned}$$

Ekvationerna i matrisform lyder $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ *där*

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{N-1} \\ x_N + 2/\Delta x^2 \end{bmatrix}$$

och för $n = 1, 2, 3, \dots N$ *och* $m = 1, 2, 3, \dots, N$ *har* $N \times N$ *matrisen* A *komponenterna*

$$A_{nm} = \begin{cases} 2(\Delta x)^{-2} + 1, & n = m, \\ -(\Delta x)^{-2}, & |n - m| = 1, \\ 0, & |n - m| > 1. \end{cases}$$

1b. Ett exempel på Matlabpogram är

```
N=100;
dx=1/(N+1);
u=zeros(N,1);
A=zeros(N,N);
F=zeros(N,1);
X=zeros(N,1);

for n=2:N-1
    x=n*dx;
    X(n)=x;

    A(n,n)=2/dx^2+1;
    A(n,n+1)=-1/dx^2;
    A(n,n-1)=-1/dx^2;

    F(n)=x;
end
A(1,1)=2/dx^2+1;
A(1,2)=-1/dx^2;

A(N,N)=2/dx^2+1;
A(N,N-1)=-1/dx^2;

X(1)=dx;
X(N)=N*dx;
```

```
F(N)=X(N)+2/dx^2;
F(1)=X(1);

u=A\F;

hold on
plot(X,u,'b')
```

2a. (5p) Betrakta differentialekvationen

$$\begin{aligned} y'(x) &= f\big(x, y(x)\big)\,,\ \ x > 0\,, \\ y(0) &= 2\,, \end{aligned}$$

där $f(x,y) := y^2 - \frac{x^4-6x^3+12x^2-14x+9}{(1+x)^2}$ och formulera den implicita bakåt Eulermetoden för att approximera $y(1)$.

2b.(5p) Skriv ett Matlabprogram som ger en approximativ lösning av problemet i uppgift 2a med implicita bakåt Eulermetoden.

2c.(5p) Visa att det lokala felet för metoden i uppgift 2b är av ordning $\mathcal{O}\big((\Delta x)^2\big)$, där Δx är metodens steglängd, och förklara vad satsen om globalt och lokalt fel visar angående metodens globala fel.

2a. Låt $x_n = n\Delta x,\ n = 0, 1, 2, \ldots, N$ med $\Delta x = 1/N$, vara en indelning av intervallet $[0, 1]$ och inför de obekanta $y_n \simeq y(x_n)$ med bakåt Eulerapproximationen

$$\begin{aligned} y_0 &= 2, \\ y_{n+1} &= y_n + \Delta t f(y_{n+1}, x_{n+1})\,,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots, N-1\,. \end{aligned}$$

2b. Ett exempel på Matlabkod är

```
N=10000;
dx=1.6/N;
K=100;
f=@(y,x) y*y-(x^4-6*x^3+12*x^2-14*x+9)/(1+x)^2;
%g=@(x) -(x^4-6*x^3+12*x^2-14*x+9)/(1+x)^2;    %anvands om (*) anvands
y=zeros(N,1);
x=zeros(N,1);
y(1)=2;
x(1)=0;
```

```
for n=1:N-1
    z=y(n);
    x(n+1)=(n+1)*dx;
     for k=1:K
         z=y(n)+dx*f(z,x(n+1));
     end
%    z=(1-sqrt(1-4*dx*z-4*dx*dx*g(x(n+1))))/(2*dx);  %(*) alternativ till slingan over k o
    y(n+1)=z;
end
hold on
plot(x,y,'r')
%plot(x,y-(1-x).*(2-x)./(1+x),'b');
```

2c. Vi har $y_{n+1} = y_n + \Delta t f(y_{n+1}, x_{n+1})$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. *Låt* y_0 *vara godtyckligt. Det lokala felet är då* $|y(\Delta x) - y_1|$. *Taylorutveckling ger*

$$y(\Delta x) = y(0) + y'(0)\Delta x + \mathcal{O}((\Delta x)^2)$$

där $y'(0) = f(y_0, x_0)$ *och vi får*

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \Delta x f(y_1, x_1) \\ &= y_0 + \Delta x f(y_0 + \Delta x f(y_1, x_1), x_0 + \Delta x) \\ &= y_0 + \Delta x f(y_0, x_0) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

så att det lokala felet blir $|y_1 - y(\Delta x)| = \mathcal{O}((\Delta x)^2)$.

Satsen om globalt och lokalt fel visar att om det lokala felet är mindre än $C(\Delta x)^2$ *och om vi betraktar lösningar* $y(x)$ *som är begränsade av en konstant, så att* $\partial f(y, x)/\partial y$ *är begränsat av en konstant* K *då gäller att det global felet* $|y(1) - y_N|$ *är begränsat av* $C\Delta x(e^K - 1)/K$.

Alternativ uppgift 2.(15p) Formulera och bevisa en sats om stabilitet av en differensmetod för värmeledningsekvationen.

3. Vi söker det minimala väntevärdet

$$\min_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}[f(x, Y)] = \min_{x\in\mathbb{R}} \int_{-1/2}^{1/2} |x - y|^2 \mathrm{d}y \tag{1}$$

där Y är en stokastisk variabel med likformig fördelning på $[-1/2, 1/2]$ och $f(x, y) := |x - y|^2$ för $x \in \mathbb{R}$ och $y \in [-1/2, 1/2]$.

3a. (10p) Betrakta iterationerna

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_{n+1} &= x_n - \Delta t \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, Y_n)\,,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots\,,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

och visa att det finns en konstant C så att $\mathbb{E}[|x_n|^2] \le C,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots$ för lämpligt val av $\Delta t \in \mathbb{R}$. Ange detta Δt. Här är $Y_n,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots$ oberoende stokastiska variabler som alla är likformigt fördelade på $[-1/2, 1/2]$. Uttrycket $\mathbb{E}[|x_n|^2]$ betecknar väntevärdet av $|x_n|^2$. Beräkna också x_* där

$$
\mathbb{E}[f(x_*, Y)] = \min_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[f(x, Y)]
$$

och visa en feluppskattning för $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|x_n - x_*|^2]$.

3b. (6p) Skriv ett Matlabprogram som utför iterationerna i uppgift 3a och plottar $x_n,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots N$, (t.ex. med hjälp av Matlabkommandot `rand` där `help rand` ger utskriften: `rand Uniformly distributed pseudorandom numbers. R = rand(N) returns an N-by-N matrix containing pseudorandom values drawn from the standard uniform distribution on the open interval(0,1).`)

3c. (4p) I maskininlärning används ofta iterationer i stil med (2). Metoden kallas då stokastisk gradientmetod och den används för att bestämma parametrar $x \in \mathbb{R}^N$ i neurala nätverk. Den vanliga gradientmetoden

$$
\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \Delta t \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \mathbb{E}[f(\bar{x}_n, Y)]\,,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots\,,
$$

kräver beräkning väntevärdet $\mathbb{E}[f(x, Y)]$ i varje steg. Antag att detta görs med Monte Carlo-metoden. Jämför de två iterationsmetodernas beräkningsarbete per iteration genom att ange antalet funktionsevaluaringar som bör göras.

3a. Eftersom x_n och Y_n är oberoende har vi $\mathbb{E}[x_nY_n] = \mathbb{E}[x_n]\mathbb{E}[Y_n]$ och definitionen av Y_n ger $\mathbb{E}[Y_n] = \int_{-1/2}^{1/2} y\mathrm{d}y = 0$. Vi får då

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|x_{n+1}|^2] &= \mathbb{E}[|x_n - 2\Delta t(x_n - Y_n)|^2] \\
&= \mathbb{E}[|(1-2\Delta t)x_n + 2\Delta t Y_n|^2] \\
&= \mathbb{E}[|1-2\Delta t|^2|x_n|^2] + 4\Delta t(1-2\Delta t)\underbrace{\mathbb{E}[x_nY_n]}_{=0} + 4(\Delta t)^2\mathbb{E}[|Y_n|^2] \\
&= (1-2\Delta t)^2\mathbb{E}[|x_n|^2] + 4(\Delta t)^2\int_{-1/2}^{1/2} y^2\mathrm{d}y \\
&= \underbrace{(1-2\Delta t)^2}_{=:\alpha}\mathbb{E}[|x_n|^2] + \underbrace{\frac{(\Delta t)^2}{3}}_{=:\beta}\,.
\end{aligned}$$

Detta ger rekursionen

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|x_n|^2] &= \alpha\mathbb{E}[|x_{n-1}|^2] + \beta \\
&= \alpha(\alpha\mathbb{E}[|x_{n-2}|^2] + \beta) + \beta \\
&= \alpha^2\mathbb{E}[|x_{n-2}|^2] + \beta(1+\alpha) \\
&= \ldots = \alpha^n\mathbb{E}[|x_0|^2] + \beta(1 + \alpha + \ldots + \alpha^{n-1}) \\
&= \alpha^n\mathbb{E}[|x_0|^2] + \beta\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} \\
&= (1-2\Delta t)^{2n}\underbrace{\mathbb{E}[|x_0|^2]}_{=1} + \frac{\Delta t}{12}\frac{1-\alpha^n}{1-\Delta t}\,.
\end{aligned}$$

Om $|1-2\Delta t| < 1$, d.v.s. om $0 < \Delta t < 1$, har vi

$$\mathbb{E}[|x_n|^2] = \alpha^n + \frac{\Delta t}{12}\frac{1-\alpha^n}{1-\Delta t} \to 0 + \frac{\Delta t}{12(1-\Delta t)} \tag{3}$$

när $n \to \infty$, vilket också ger $\mathbb{E}[|x_n|^2] \le 1 + \frac{\Delta t}{12(1-\Delta t)}$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

Vi ser att

$$\int_{-1/2}^{1/2} |x-y|^2\mathrm{d}y = \int_{-1/2}^{1/2}(x^2 - 2xy + y^2)\mathrm{d}y = x^2 + \frac{1}{12}$$

som har minimum för $x = x_* = 0$. Svar: Metoden är stabil om $0 < \Delta t < 1$ och vi har $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[|x_n - x_*|^2] = \frac{\Delta t}{12(1-\Delta t)}$, där $x_* = 0$, med konvergensfart enligt (3).

3b. Ett exempel på Matlabkod är

```
N=10000;
dt=0.01;
x=zeros(N,1);
```

```
x(1)=1;
for n=1:N-1
    y=rand-0.5;
    x(n+1)=x(n)-dt*2*(x(n)-y);
end
plot(x);
```

3c. Låt M vara ett positive heltal. Vi har Monte Carlo-approximationen

$$\mathbb{E}[|x_n - Y_n|^2] \simeq \sum_{m=1}^{M} |x_n - Y_m|^2/M$$

där $Y_m,\ m = 1, \dots, M$ är oberoende och likformigt fördelade på $[-1/2, 1/2]$. Då blir gradient-metoden

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - 2\Delta t \sum_{m=1}^{M} (\bar{x}_n - Y_m)/M = (1 - 2\Delta t)\bar{x}_n + 2\Delta t \sum_{m=1}^{M} \frac{Y_m}{M}\,.$$