KTH Matematik

Namn: ....

Personnummer:.. **Program och årskurs:** ....

Tentamen del 1
Numeriska metoder SF1544 och BE3003
08.00-11.00 5:e juni 2018

Gränsen för betyg E är 14 poäng (inklusive bonuspoäng).

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).
Skriv svaren på dessa papper med **namn och personnummer på varje papper**.

Ange dina bonuspoäng från kursomgången 2017/2018 här:

1.(2p) Matlabkoden för de konvergenta fixpunktiterationerna

```
N=10;
x=1;
for n=1:N
    x=-1/(1+2*abs(x));
end
display(x);
```

ger en utskrift som är närmast

☐ 0	☐ 0.5	☐ -0.75
☐ 0.25	☒ -0.5	☐ ∞
☐ -0.25	☐ 0.75	☐ inget, koden fungerar ej.

Matlabkommandot `help abs` ger utskriften ” `abs Absolute value. abs(X) is the absolute value of the elements of X.`”

2.(3p) Givet begynnelsevärdesproblemet

$$y'(t) = \sin(y(t) + u(t))^{7/2} \qquad y(0) = 1$$
$$u'(t) = (t+1)y^2(t), \qquad u(0) = 1.$$

Vilken approximation $u_1 \approx u(0.5)$ ges med Framåt Eulermetoden och steglängden 0.5?

- [x] $3/2$
- [ ] 3
- [ ] $\pi/4$
- [ ] -1
- [ ] $\sin(2)^{7/2}$
- [ ] $1 + \cos(2)$
- [ ] 1
- [ ] 0

3.(3p) Modellen $y(x) = \frac{\alpha}{x} + 2\beta x$ ska anpassas till punkterna i tabellen nedan i minstakvadratmening.

x	-1	1/2	1
y	1	1	-1

Det leder till det överbestämda ekvationssystemet $A\mathbf{c} \approx \mathbf{y}$ där kolumnvektorn $\mathbf{c}$ ska bestämmas.

Vad blir α och β?

- [ ] $\alpha = 5/2$ och $\beta = 5/2$
- [x] $\alpha = 1$ och $\beta = -1$
- [ ] $\alpha = 1/2$ och $\beta = 1/2$
- [ ] $\alpha = -2$ och $\beta = 1/2$
- [ ] $\alpha = -1$ och $\beta = 3/4$
- [ ] $\alpha = 1$ och $\beta = 0$
- [ ] $\alpha = 0$ och $\beta = 0$
- [ ] $\alpha = 2$ och $\beta = -1$

4.(2p) Randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} &y''(t) + y'(t) = 3, \qquad 5 \leq t \leq 9, \\ &y(5) = 4, \\ &y(9) = 8, \end{aligned}$$

ska approximeras med andra ordningens finita differensapproximationer med steglängden $\Delta t = 2$. Vad blir approximationen av $y(7)$?

- [ ] 1
- [x] 2
- [ ] 3
- [ ] 4
- [ ] 6
- [ ] 7
- [ ] 8
- [ ] 9

5.(2p) Ekvationen $f(x) = x^2 - 4$ har en rot $x = 2$. Ett steg med Newtons metod och startgissningen $x_0 = 1$ ger approximationen x_1 av roten lika med

- [ ] $-1/2$
- [ ] $1/2$
- [ ] $3/2$
- [x] 2.5
- [ ] 0
- [ ] 1
- [ ] 2
- [ ] 3

Namn: ....
Personnr:...................................

6.(2p) Integralen

$$\int_0^1 \frac{(\cos(\pi x) + 1)}{2x + 1} \mathrm{d}x$$

approximeras med trapetsregeln. Vad blir det approximativa värdet med steglängden $\Delta x = 0.5$?

☐ 0 ☐ 1/2 ☒ 3/4 ☐ 5/4 ☐ 2 ☐ 5/2 ☐ 3

7.(2p) Matlabfunktionen nedan är given.

```
function y = foo(x, a)
i=0;
for k=x
    if(k>a)
        i=i+1;
        m(i)=k;
    end
end
y=m(i);
end
```

Resultatet av anropet `foo([1 7 4 0], 2)` blir

☐ 0 ☐ 2 ☒ 4 ☐ 6

☐ 1 ☐ 3 ☐ 5 ☐ 7

8. a.(1p) Antag att vi har löst ett kvadratiskt linjärt ekvationssystem, $A\vec{x} = \vec{b}$ med obekanta $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$. Matrisen A är en fylld matris så vi löser systemet med Gausselimination. Om antalet obekanta i systemet fördubblas så ökar beräkningskostnaden med en faktor

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 6 ☐ 7 ☒ 8

b.(1p) Antag att vi har löst ett kvadratiskt linjärt ekvationssystem, $A\vec{x} = \vec{b}$ med obekanta $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$. Matrisen A är en triangulär matris så vi löser systemet med framåt- eller bakåtsubstitution. Om antalet obekanta i systemet fördubblas så ökar beräkningskostnaden med en faktor

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8

Namn: ....
Personnr:...................................

9. Differentialekvationen

$$\begin{aligned} y''(t) + \epsilon(t^2-1)y'(t) + y(t) = 0, \quad t \geq 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0, \end{aligned}$$

ska skrivas om som ett system av första ordningen, där ϵ är en positiv parameter.

a.(1p) Vilket av nedanstående system ger en korrekt omskrivning av differentialekvationen? (1p)

- ☐ $u_1' = u_2$, $u_2' = -\epsilon(u_1^2-1)u_1 + u_2$
- ☐ $u_1' = u_2$, $u_2' = -\epsilon(t^2-1)u_2' - u_1'$
- ☐ $u_1' = u_1$, $u_2' = -\epsilon(t^2-1)u_2 - u_1$
- ☒ $u_1' = u_2$, $u_2' = -\epsilon(t^2-1)u_2 - u_1$
- ☐ $u_1' = u_2$, $u_2' = u_3$, $u_3' = -\epsilon(t^2-1)u_3 - u_2$

b. (1p) Vilket av nedanstående uppsättning begynnelsevillkor hör till rätt svar i uppgift **a.**? (1p)

- ☐ $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = 0$, $u_3(0) = 0$
- ☐ $u_1'(0) = 1$, $u_2''(0) = 0$
- ☐ $u_1(1) = 0$, $u_2(0) = 0$
- ☒ $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = 0$
- ☐ $u_1'(0) = 1$, $u_2'(0) = 0$