KTH Matematik

Namn: ....

Personnummer:... **Program och årskurs:** ....

Tentamen del 1
Numeriska metoder SF1544 och BE3003
09.00-12.00 12/1 2017 Gränsen för betyg E är 14 poäng (inklusive bonuspoäng).

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).
Skriv svaren på dessa papper med **namn och personnummer på varje papper**.
Bonus. Ange dina bonuspoäng från kursomgången HT16 här:

1. (2p) Matlabkoden

```
N=10;
x=1;
for n=1:N
    x=8/(2+x);
end
display(x)
```

ger en utskrift som är närmast

- ☐ 1.0
- ☐ 1.2
- ☐ 1.4
- ☐ 1.6
- ☐ 1.8
- ☒ 2.0
- ☐ 2.2
- ☐ 2.4
- ☐ 2.6
- ☐ 2.8
- ☐ 3.0
- ☐ inget, eftersom koden ej fungerar.

2. (2p) Låt funktionen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara definierad av

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} y - x^2 \\ 2x - y^2 \end{bmatrix}.$$

Ett steg med Newtons metod för att lösa $F(x,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ med startgissningen $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ger y approximationen

☐ 1.0 ☐ 1.8 ☐ 2.6

☐ 1.2 ☒ 2.0 ☐ 2.8

☐ 1.4 ☐ 2.2 ☐ 3.0

☐ 1.6 ☐ 2.4 ☐ något annat

3 (2p) Antag att

$$\begin{aligned} y''(t) + y(t) &= 1\,, \quad t > 0 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1\,. \end{aligned}$$

Ett steg med framåt-Eulermetoden ger $y(0.1)$ approximationen

☐ 0.0 ☐ -0.1

☒ 0.1 ☐ -0.2

☐ 1.1 ☐ -1.1

☐ 0.2 ☐ något annat.

4. (2p) Mittpunktsmetoden med två lika stora intervall ger integralen $\int_0^1 \frac{x}{1+x}\mathrm{d}x$ approximationen

☐ $\frac{35}{11}$

☐ $\frac{10}{35}$ ☐ $\frac{35}{10}$

☒ $\frac{11}{35}$ ☐ $\frac{35}{12}$

☐ $\frac{12}{35}$ ☐ något annat.

5. (2p) Låt

$$\begin{aligned} y'(t) &= -10y(t), \quad t > 0 \\ y(0) &= 0.9\,. \end{aligned}$$

Ett steg med bakåt-Eulermetoden ger $y(0.1)$ approximationen

☐ 0.9 ☐ 0.4

☐ 0.8 ☐ 0.2

☐ 0.55 ☐ 0.15

☒ 0.45 ☐ något annat.

6. (2p) Antag att $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, där $a > 2$ är en positiv parameter. Då blir $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{a} & 1 \end{bmatrix}$. Betrakta ekvationssystemen $Ax = b$ och $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$, där $x, \Delta x, b, \Delta b \in \mathbb{R}^2$. Hur stor kan parametern a ungefär vara för att den maximala relativa felförstoringen, $\|\Delta x\|_\infty / \|x\|_\infty$, ska vara begränsad av 10^{-5} om den maximal relativa störningen, $\|\Delta b\|_\infty / \|b\|_\infty$, är 10^{-9}

☐ 10^{11}	☐ 10^{7}	☐ 10^{3}
☐ 10^{10}	☐ 10^{6}	☐ 10^{2}
☐ 10^{9}	☐ 10^{5}	☐ 10^{1}
☐ 10^{8}	☒ 10^{4}	☐ 1

där $\| \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \|_\infty := \max(|v_1|, |v_2|)$.

7. (2p) Finita differensmetoden

$$-\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta x)^2} + (u_n)^2 = 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, N$$

$$u_0 = u_{N+1} = 0$$

kan skrivas som

☐ ett linjärt ekvationssystem som kan lösas med Gausseliminering

☒ ett ickelinjärt ekvationssystem som kan lösas med Newtons metod i kombination med Gausseliminering

☐ ett skalärt begynnelsevärdesproblem som kan lösas med Eulers metod

☐ ett system av differentialekvationer med begynnelsevärden som kan lösas med Eulers metod.

8. (2p) Matlabkoden

```
N=10000;
s=0;
for n=1:N
    x=rand(1);
    y=rand(1);
    if(y<x)
        s=s+1
    end
end
display(s/N)
```

ger en utskrift som oftast är närmast

☐ 1	☐ $\frac{1}{4}$	☐ 2
☒ $\frac{1}{2}$	☐ $\frac{1}{5}$	☐ 3
☐ $\frac{1}{3}$	☐ $\frac{1}{6}$	☐ 4

Kommandot **`help rand`** ger utskriften: rand Uniformly distributed pseudorandom numbers. R = rand(N) returns an N-by-N matrix containing pseudorandom values drawn from the standard uniform distribution on the open interval (0,1)."

9. (2p) Antag att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är konvex och två gånger deriverbar med $\max_{x\in\mathbb{R}} f''(x) < 1$. Iterationsmetoden

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_{n+1} &= x_n - \alpha f'(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

ger med $\alpha = 0.2$ en approximativ lösning till

☐ $f(x) = 0$	☐ $\int_{-\infty}^{x} f(y)\mathrm{d}y = 0$
☐ $f''(x) = 0$	☐ lösning saknas
☒ $\min_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.	☐ $\min_{x\in\mathbb{R}} f'(x)$

10. (2p) Låt $A = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$. Iterationsmetoden

$$\begin{aligned} x_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ y_k &= Ax_{k-1}, \\ x_k &= y_k/\|y_k\|_\infty, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

ger $\lim_{k\to\infty} \|y_k\|_\infty$ värdet

☐ 0	☐ 1	☐ 1.5
☐ 0.5	☒ 2	☐ 2.5
☐ -0.5	☐ 3	☐ något annat

där $\left\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\|_\infty := \max(|a|, |b|)$.