KTH Matematik

Namn: ....

Personnummer:.. **Program och årskurs:** ....

Kontrollskrivning
Numeriska metoder SF1544 och BE3003
08.00-10.00 1:a mars 2018

Gränsen för betyg E är 14 poäng (inklusive bonuspoäng).

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).
Skriv svaren på dessa papper med **namn och personnummer på varje papper**.

Ange dina bonuspoäng från kursomgången 2017/2018 här:

1a. (1p) Betrakta talföljden $x_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$, där $x_0 = 1$ och

$$x_{n+1} = \frac{1 - x_n}{10}\,, n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Är gränsvärdet $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n$ ändligt?

- [x] Ja
- [ ] Nej
- [ ] Varken ändligt eller oändligt.

1b. (2p) Hur stort behöver n minst vara för att $|\alpha - x_n|$ ska vara begränsat av 10^{-10} ? Välj det alternativ som är närmast.

- [ ] 0
- [ ] 1
- [ ] 5
- [x] 10
- [ ] 100
- [ ] ∞

2. (2p) Matlabkoden

```
s=0.0;
N=1000000;
for n=1:N
    x=rand(1);
    y=rand(1);
    s=s+x^2+y^2;
end
display(s/N)
```

ger en utskrift som oftast är närmast

- [ ] 0.1
- [ ] 0.4
- [x] 0.7
- [ ] 0.2
- [ ] 0.5
- [ ] 0.8
- [ ] 0.3
- [ ] 0.6
- [ ] 0.9

Tips: Matlabkommandot `help rand` ger utskriften: ”rand Uniformly distributed pseudorandom numbers. R = rand(N) returns an N-by-N matrix containing pseudorandom values drawn from the standard uniform distribution on the open interval (0,1).”

3. (2p) Anta att vi känner till att sidan i en kub har högst 3% relativt fel. Med vilket relativt fel kan vi approximera kubens volym? Välj det alternativ som är närmast.

- [ ] 0.3%
- [ ] 1%
- [ ] 3%
- [ ] 4%
- [ ] 5%
- [ ] 6%
- [x] 9%

4. (2p) Trapetsmetoden med två lika stora intervall ger integralen $\int_0^1 \frac{1+x}{x+2}\,\mathrm{dx}$ approximationen

- [ ] 63/120
- [ ] 65/120
- [ ] 67/120
- [ ] 69/120
- [x] 71/120
- [ ] 73/120
- [ ] 75/120
- [ ] något annat

5. (2p) Anta att vi vill approximera lösningen x till $Ax = b$ med hjälp av iterationerna

$$x_{n+1} = D^{-1}(b - Mx_n),\ n = 0, 1, 2, \dots,$$

där $x_n \in \mathbb{R}^2$, $b \in \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$ och A är en 2×2 matris som kan skrivas $A = D + M$ där D är diagonal och ickesingulär. Antag också att $D^{-1}M = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.01 \\ \alpha & 0.5 \end{bmatrix}$, där $\alpha > 0$. Iterationsfelet uppfyller

$$\|x_{n+1} - x\|_\infty = \|D^{-1}M(x_n - x)\|_\infty$$

Hur stort kan α högst vara för att iterationerna säkert ska konvergera?

Namn: ....
Personnr:...................................

- [ ] $\alpha < 0.1$
- [ ] $\alpha < 0.2$
- [ ] $\alpha < 0.3$
- [ ] $\alpha < 0.4$
- [x] $\alpha < 0.5$
- [ ] $\alpha < 0.6$

6. (3p) Första steget i Newtons metod med startgissningen $x = 1$ och $y = 1$ för att lösa ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x - y^3 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

leder till

- [ ] $x = 0$
- [ ] $x = 1/8$
- [ ] $x = -1/8$
- [ ] $x = 2/8$
- [ ] $x = -2/8$
- [ ] $x = 1$
- [ ] $x = 3/8$
- [ ] $x = -3/8$
- [x] något annat.

7. (2p) Matlabkoden för Eulers metod

```
N=1000;
dt=1/N;
y =1;
for n=1:N
      y=y+dt*y^(1/2);
end
display(y)
```

ger en utskrift som är närmast

- [ ] 5/4
- [ ] 6/4
- [ ] 7/4
- [ ] 8/4
- [x] 9/4
- [ ] 10/4
- [ ] 0
- [ ] ∞
- [ ] inget, koden fungerar ej.

8. (2p) Finita differensmetoden

$$\frac{u_{n+1,m} - u_{n,m}}{\Delta t} = (1 + m\Delta x)\frac{u_{n,m+1} - 2u_{n,m} + u_{n,m-1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{n,m+1} - u_{n,m-1}}{2\Delta x}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, M-1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

med $\Delta x = 1/M$ och $\Delta t = 1/(5M^2)$, där $u_{n,m}$ är en approximation av $u(n\Delta t, m\Delta x)$ och $u_{n,0} = u_{n,M} = 0$ och $u_{0,m} = m\Delta x(m\Delta x - 1)$ för alla n och m ger en approximation av

Namn: ....
Personnr:...

- [ ] $0 = \frac{\partial}{\partial x}\big((1+x)\frac{\partial}{\partial x}u(t,x)\big),\ u(t,0) = u(t,1) = 0, u(0,x) = x(x-1),\ t > 0, x \in [0,1]$
- [x] $\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\big((1+x)\frac{\partial}{\partial x}u(t,x)\big),\ u(t,0) = u(t,1) = 0, u(0,x) = x(x-1),\ t > 0, x \in [0,1]$
- [ ] $\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\big(x\frac{\partial}{\partial x}u(t,x)\big),\ u(t,0) = u(t,1) = 0, u(0,x) = x(x-1),\ t > 0, x \in [0,1]$
- [ ] $\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(u(t,x)\big),\ u(t,0) = u(t,1) = 0, u(0,x) = x(x-1),\ t > 0, x \in [0,1]$
- [ ] Inget av ovanstående alternativ.

9. (2p) Anta att $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Potensmetoden (engelska: Power Method), implementerad i Matlabfunktionen

```
function [lam,u]=powerit(A,y,k)
x=y;
for j=1:k
     u=x/norm(x);
     x=A*u;
     lam=u'*x;
end
u=x/norm(x);
end
```

ger för nästan alla startvärden y en approximation av ett av egenvärdena (och tillhörande egenvektor). Vilket?

- [ ] 1
- [ ] 2
- [x] 3
- [ ] 4
- [ ] 5
- [ ] 6