

Laboration i SF1523: Studera en pendel och konstruera en optimal balk

Avsikten med denna laboration är att:

- snabbt komma igång med träning på matlabprogrammering (utnyttja gärna alla schemalagda laborationstillfällen),
- öva på numerisk lösning av differentialekvationer med Matlab,
- lösa ett optimeringsproblem med en differentialekvation som bivillkor,
- repetera och hantera metoden med Lagrangefunktioner för att lösa optimeringsproblem med bivillkor
- studera ett exempel när en differentialekvation används för att bestämma koefficienter i ekvationen, d.v.s. lösa ett inverst problem.

Denna laboration innehåller i del A frågor för träning på programmering och numeriska metoder för differentialekvationer. Del B handlar om optimering, med en numerisk metod som kan generaliseras till många problem, t.ex. används den för att söka optimal form av en vinge eller ett skrov.

Del A 1. En populations antal individer $y(t)$ vid tiden $t > 0$ beskrivs av differentialekvationen

$$y'(t) = ky(t)(a - y(t)), \quad t > 0$$

med begynnelsevärdet $y(0) = y_0$ där k, a och y_0 är givna positiva konstanter. Byt variabler $\tau = tka$ och $z(\tau) = y(t)/a$ och visa att

$$z'(\tau) = z(\tau)(1 - z(\tau)), \quad \tau > 0.$$

Skriv ett matlabprogram som löser denna differentialekvation med Eulers metod

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta\tau} = f(z_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

där z_n är en approximation av $z(n\Delta\tau)$ med tidsteget $\Delta\tau = 1/N$ och $f(z) = z(1 - z)$, för olika val av begynnelsedata $z(0)$. Visa figurer av Eulerapproximation av funktionen $z : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ med lämpligt val av tidsteg $\Delta\tau$ och sluttid T .

2a. En dämpad pendel med vinkelutslaget $x(t)$ vid tiden t uppfyller differentialekvationen

$$x''(t) + \beta x'(t) + \sin x(t) = 0, \quad t > 0 \tag{1}$$

med begynnelsevillkoren $x(0) = \pi/2$ och $x'(0) = 0$ där $\beta = 1/5$. Skriv (1) som ett system och approximera ekvationen med matlab, t.ex. med hjälp av `ode45` som beskrivs i kapitel 6.5.2 i Sauers bok. Jämför med approximationen till det linjariserade problemet

$$y''(t) + \beta y'(t) + y(t) = 0, \quad t > 0.$$

2b. Studera vinkelutslaget $x(t)$ för en dämpad pendel i ett kraftfält

$$\begin{aligned}x''(t) + \beta x'(t) + \sin x(t) &= \alpha \cos(\omega t), \quad t > 0 \\x(0) = x'(0) &= 0,\end{aligned}$$

där $\alpha = 1/10$. Bestäm en numerisk approximation av funktionen x för några värden ω mellan 1/2 och 2. För vilken frekvens ω blir den asymptotiska amplituden störst?

2c. Jämför resultaten i uppgift 2b med den linjära modellen

$$\begin{aligned}y''(t) + \beta y'(t) + y(t) &= \alpha \cos(\omega t), \quad t > 0, \\y(0) = y'(0) &= 0,\end{aligned}$$

och verifiera att för små värden på $|\alpha|$ är överensstämmelsen god. Varför?

Del B 3. Betrakta utböjningen $u(x)$ av en fritt upplagd balk som löser Bernoulli-Eulers ekvation (se kapitel 5.2 i Zill-Wright)

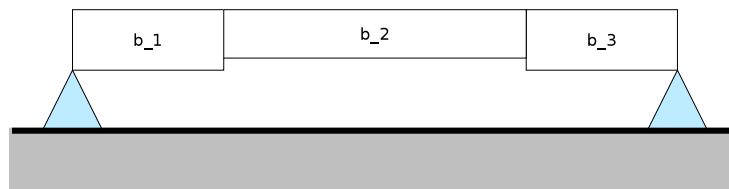
$$\begin{aligned}(b(x)u''(x))'' &= f(x), \quad x \in (0, 1) \\u(1) = b(1)u''(1) &= u(0) = b(0)u''(0) = 0\end{aligned}\tag{2}$$

med böjstyvheten $b(x)$ och kraften $f(x)$ per längdenhet. Denna ekvation kan skrivas som ett system

$$\begin{aligned}w''(x) &= f(x) \quad x \in (0, 1), w(0) = w(1) = 0 \\b(x)u''(x) &= w(x) \quad x \in (0, 1), u(0) = u(1) = 0.\end{aligned}$$

Anta att böjstyvheten b är styckvis konstant

$$b(x) = \begin{cases} b_1 & x < 2/5 \\ b_2 & 2/5 \leq x < 3/5 \\ b_3 & x \geq 3/5. \end{cases}$$



Fritt upplagd balk med styckvis varierande bredd.

Målet är att välj parametrarna $b_1 > 0$ och $b_2 > 0$ med $b_3 = 1 - b_2 - b_1 > 0$ så att energin $\int_0^1 f(x)u(x)dx$ minimeras. Vi kan tolka bivillkoret $b_1 + b_2 + b_3 = 1$ som att vi har en given mängd material att göra vår balk av, med varierande bredd och konstant höjd.

3a. Låt V_n vara en approximation av $v(x_n)$ för $x_n = hn$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, $h = 1/N$, och approximera andraderivatan med den vanliga andradifferensen $D^2V_n := (V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1})/h^2$ för $n = 1, \dots, N-1$. En approximation av differentialekvationen är differensekvationen

$$D^2(BD^2U)_n = F_n, \quad n = 1, \dots, N-1, \quad D^2U_0 = D^2U_N = 0, \quad U_0 = U_N = 0 \quad (3)$$

som kan skrivas

$$\begin{aligned} D^2W_n &= F_n & n = 1, \dots, N-1, & \quad W_0 = W_N = 0 \\ B_n D^2U_n &= W_n & n = 1, \dots, N-1, & \quad U_0 = U_N = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

med

$$B_n = \begin{cases} b_1 & x_n < 2/5 \\ b_2 & 2/5 \leq x_n < 3/5 \\ b_3 & x_n \geq 3/5 \end{cases}$$

och vi kan tolka D^2V_n som en matris vektor multiplikation, med den tridiagonala matrisen som har $-2/h^2$ i huvuddiagonalen och $1/h^2$ i övre och undre diagonalen,

$$D^2 = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Vi ska nu minimera energin $\sum_{n=1}^{N-1} F_n U_n =: F \cdot U$ under bivillkoret att ekvationen (3) är uppfylld. Det är användbart att studera Lagrangefunktionen $L(U, \Lambda, b) := F \cdot U + (F - D^2BD^2U) \cdot \Lambda$. Här är B diagonalmatrisen med B_n i diagonalen,

$$B = \text{diag}(B_n) = \begin{bmatrix} b_1 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & b_2 & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & 1 - b_2 - b_1 & \\ & & & & & & \cdot & \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Förklara varför Lagrangefunktionen satisfierar $L(U, \Lambda, b) = F \cdot (U + \Lambda) - BD^2U \cdot D^2\Lambda$ och ger ekvationerna

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{\Lambda_n} L(U, \Lambda, B) = D^2(BD^2U)_n - F_n, & n = 1, \dots, N-1, & \quad D^2U_0 = D^2U_N = 0, U_0 = U_N = 0 \\ 0 &= \partial_{U_n} L(U, \Lambda, B) = D^2(BD^2\Lambda)_n - F_n, & n = 1, \dots, N-1, & \quad D^2\Lambda_0 = D^2\Lambda_N = 0, \Lambda_0 = \Lambda_N = 0 \\ 0 &= \partial_{b_i} L(U, \Lambda, B), & i = 1, 2. & \end{aligned}$$

3b. Vi ser att i detta fall är $\Lambda = U$ och för en given böjstyvhets B kan differensekvationen (4) lösas. Bestäm b_i numeriskt till exempel genom att implementera följande iteration i Matlab:

$$b_i^{m+1} = b_i^m - \delta \partial_{b_i} L(U^m, \Lambda^m, B^m) \quad i = 1, 2,$$

där $\delta > 0$ väljs lämpligt litet och $U^m = \Lambda^m$ är lösningen till (4) med $B = B^m$ och b_3 är eliminerad enligt (5). Välj t.ex. en jämt fördelad last $f(x) = 1$. Notera att L ska deriveras med avseende på diagonalelementen i (5).

3c. Testa numeriskt noggrannheten av approximationen (3) till (2) (hur?). Beskriv de felkällor din lösning av optimal balk har och jämför felens storlek. Är stora konditionstal inblandade? Motivera noggrannheten du ser.