Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

KONTROLLSKRIVNING I SF1917/SF1918/SF1919
SANNOLIKHETSLÄRA OCH STATISTIK,

ONSDAG 20 NOVEMBER 2024 KL 08.00–10.00.

Tillåtna hjälpmedel: miniräknare.
Svara med minst tre värdesiffrors noggrannhet på den bifogade svarsblanketten.
För godkänt krävs att minst tre av fem uppgifter är korrekt besvarade.

Uppgift 1

På valdagen 5 november 2024 gjordes en valundersökning av företaget Edison Research i delstaten North Carolina. Enligt denna så röstade 44% av alla kvinnor på Donald Trump i det amerikanska presidentvalet 5 november 2024 medan 58% av alla män gjorde det. Utav alla röstande var 47% män. Hur stor andel Trumpväljare utgjordes av kvinnor?

Uppgift 2

Den stokastiska variabeln X har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3, & \text{om } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Låt $Y = X^2$ och bestäm det numeriska värdet av täthetsfunktionen $f_Y(y)$ i punkten $y = 0.8$.

Uppgift 3

Antag att X_1 och X_2 är oberoende stokastiska variabler som båda är likformigt fördelade över intervallet $[0, 1]$.
Dvs.

$$f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = \begin{cases} 1, & \text{om } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Beräkna $P(X_1 - 2X_2 < 0.5)$.

Uppgift 4

Antag att X är en diskret stokastisk variabel med följande sannolikhetsfunktion

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.35, & x = 0, \\ 0.4, & x = 1, \\ 0.15, & x = 2, \\ 0.1, & x = 3. \end{cases}$$

Beräkna variansen $V(2X + 3)$.

Uppgift 5

De oberoende stokastiska variablerna X_1 och X_2 är båda exponentialfördelade med väntevärde 2, dvs. de har täthetsfunktionerna

$$f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot e^{-x/2}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

$Z = min(X_1, X_2)$ = det minsta av X_1 och X_2. Beräkna $P(Z < 2)$.

Lycka till!

Lösningsförslag

Uppgift 1

Betrakta händelserna

$$\begin{aligned} A &= \text{personen röstade på Trump} \\ B &= \text{personen är en kvinna.} \end{aligned}$$

Enligt uppgifterna har vi då

$$\begin{aligned} P(A \mid B) &= 0.44 \\ P(A \mid B^\star) &= 0.58 \\ P(B^\star) &= 0.47. \end{aligned}$$

Totala andelen Trumpväljare är då

$$P(A) = P(A \mid B)\, P(B) + P(A \mid B^\star)\, P(B^\star) = 0.44 \cdot (1 - 0.47) + 0.58 \cdot 0.47 = 0.5058$$

Vi får då genom Bayes sats

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)\, P(B)}{P(A)} = \frac{0.44 \cdot (1 - 0.47)}{0.5058} \approx 0.461$$

Så ungefär 46.1% av alla Trumpväljare i NC är kvinnor.

Uppgift 2

För $0 \leq x \leq 1$ gäller att $F_x(x) = \int_0^x 4t^3 dt = x^4$ eftersom den stokastiska variabeln X har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3, & \text{om } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Ta först fram $F_y(y)$ och derivera sedan.
$F_y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = F_x(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^4 = y^2$

$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_y(y) = 2y \Rightarrow f_Y(0.8) = 1.6$

Uppgift 3

I lösningen gäller att $X_1 = X$ och $X_2 = Y$
Eftersom X och Y är oberoende har vi att

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Vi vill då beräkna

$$P(X - 2Y < 0.5) = \iint_D f_{X,Y}(x, y) dxdy$$

där $D = \{(x, y) : x - 2y < 0.5\} = \{(x, y) : y > -0.25 + 0.5x$. Eftersom $f_{X,Y}(x, y)$ är lika med ett på domänen $[0, 1]^2$ kan vi skriva om integralen ovan som

$$\iint_{D\cap[0,1]^2} 1dxdy.$$

Om vi ritar upp detta ser vi att $D \cap [0, 1]^2$ bildas av kvadraten $[0, 1]^2$ där en triangel med hörnen $(0.5, 0)$, $(1, 0.25)$ och $(1, 0)$ har tagits bort. Integralen blir då lika med arean av $[0, 1]^2$ minus arean av triangeln, vilket ger

$$1 - \frac{0.5 \cdot 0.25}{2} = 1 - 0.625 = 0.9375.$$

Uppgift 4

Eftersom $V(2X + 3) = 2^2 V(X)$ så räcker det med att först beräkna $V(X)$. Här använder vi formeln $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ och får

$$E(X) = 0 \cdot 0.35 + 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.15 + 3 \cdot 0.1 = 1.0$$
$$E\left(X^2\right) = 0^2 \cdot 0.35 + 1^2 \cdot 0.4 + 2^2 \cdot 0.15 + 3^2 \cdot 0.1 = 1.9,$$

vilket ger

$$V(X) = 1.9 - 1.0^2 = 0.9,$$

och vi får då $V(2X + 3) = 4 \cdot 0.9 = 3.6$.

Uppgift 5

I lösningen gäller att $X_1 = X$ och $X_2 = Y$

$$P(Z < 2) = P(\text{minsta värdet är mindre än 2}) = P(\text{ minst ett av värdena är mindre än 2}) =$$

$$= 1 - P(\text{båda värdena är större än 2}) = 1 - P(X > 2 \cap Y > 2) =$$

$$= [\text{X och Y oberoende}] = 1 - P(X > 2)P(Y > 2)$$

.

$$P(X > 2) = \int_2^\infty \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} dx = [-e^{-\frac{1}{2}x}]_2^\infty = e^{-1}$$

$$\Rightarrow 1 - P(X > 2)P(Y > 2) = 1 - (e^{-1})^2 = 0.865$$