Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

KONTROLLSKRIVNING I SF1912/SF1914/SF1915/SF1916
SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK,
ONSDAGEN DEN 18:e SEPTEMBER 2024 KL 08.00–10.00.

Tillåtna hjälpmedel: miniräknare.

Kontrollskrivningen består av 5 uppgifter. Varje uppgift kan ge antingen 1 eller 0 poäng (korrekt svar ger 1 poäng, felaktigt svar ger 0 poäng). Svara med minst tre värdesiffrors noggrannhet. För godkänt krävs minst 3 poäng av maximalt 5 poäng.

Efternamn:

Förnamn:

Personnummer:

Uppgift 1

Ur en urna med tre röda och tre blåa kulor drar man slumpmässigt en kula och lägger undan den utan att veta färgen på den. Efter det drar man återigen slumpmässigt utan återläggning två kulor till ur urnan. Beräkna sannolikheten att dessa två kulor båda är röda.

Uppgift 2

Erik kastar två välgjorda symmetriska mynt samtidigt. Låt den stokastiska variabeln X vara antalet sådana kast Erik gör t.o.m. det för första gången blir krona på bägge mynten (dvs, varje kast avser två mynt). Bestäm sannolikheten $P(X \geq 4)$.

Uppgift 3

En stokastisk variabel X har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} a - x, & \text{om } 1 \leq x \leq a, \\ 0, & \text{annars,} \end{cases}$$

där konstanten a är okänd. Ange konstanten a. Ange sedan medianen m för s.v. X, dvs m bestäms av att $P(X < m) = 0.5$. Både a och m skall vara korrekta för att få en poäng.

Var god vänd!

Uppgift 4

Låt X vara antalet gånger en viss maskin kommer att fungera fel på en viss dag. Låt Y vara antalet gånger som en tekniker kallas vid ett nödsamtal. Deras simultana sannolikhetsfunktionen ges av

$p_{X,Y}(j,k)$	0	1	2
1	0.05	0.05	0
2	0.05	0.10	0.20
3	0.10	0.35	0.10

Således, X tar värden $\{1, 2, 3\}$ och Y tar värden $\{0, 1, 2\}$. Beräkna väntevärdet $E(X)$.

Uppgift 5

De två stokastiska variablerna X och Y har standardavvikelser $D(X) = 4$ och $D(Y) = 2$, respektive. Dessutom, vet vi att kovariansen $C(2X, Y) = -12$.
Beräkna variansen $V(X - 3Y - 12)$.

Lycka till!

Lösningsförslag

Uppgift 1

Vi söker sannolikheten $P(2R)$. LTS (Lagen om Total Sannolikhet) ger:

$P(2R) = P(2R|\text{firstball-is-red}) \cdot P(\text{firstball-is-red}) + P(2R|\text{firstball-is-blue}) \cdot P(\text{firstball-is-blue}) =$

$$= \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} \cdot \frac{1}{2} \qquad + \quad \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1+3}{(5\cdot 4)/2}\right) = \frac{1}{5} = 0.2$$

Svar: 0.2

Uppgift 2

Vi har: $X \in ffg(\frac{1}{4})$. Därför,

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - (P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}\right) \approx 0.422$$

Svar: 0.422

Uppgift 3

För täthetsfunktionen om man ritar den och räknar area under, då gäller det att arean under täthetsfunktionen är lika med 1. Vi har alltså. arean under triangeln:

$$\frac{(a-1)(a-1)}{2} = 1$$

Detta ger oss att $a = 1 + \sqrt{2} = 2.414$.
Vidare, för att hitta medianen m, med samma grafiskt tänkandet, har vi $P(X < m) = 0.5$, vilket ger:

$$\frac{(a-m)(a-m)}{2} = \frac{1}{2}$$

eller

$$\frac{(1+\sqrt{2}-m)(1+\sqrt{2}-m)}{2} = \frac{1}{2}$$

Lösningen av den sista ekvationen ger oss:

$$1 + \sqrt{2} - m = \pm 1$$

eller

$$m = 1 + \sqrt{2} \pm 1.$$

Vi ser att $m = 1 + \sqrt{2} + 1$ passar inte eftersom m måste vara inom intervallet $(1, 1 + \sqrt{2})$. Därmed,

$$m = 1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} = 1.414$$

Svar: $a = 1 + \sqrt{2} \approx 2.414$, $m = \sqrt{2} \approx 1.414$

Uppgift 4

Vi vet att: $E(X) = 1p_X(1) + 2p_X(2) + 3p_X(3)$.
Respektive marginella sannolikheterna $p_X(j)$ är:

$$p_X(1) = \sum_{k=0}^{2} p_{X,Y}(1,k) = \sum_{k=0}^{2} p_{X,Y}(X = 1 \cap Y = k) = 0.05 + 0.05 + 0 = 0.1,$$

$$p_X(2) = \sum_{k=0}^{2} p_{X,Y}(2,k) = \sum_{k=0}^{2} p_{X,Y}(X = 2 \cap Y = k) = 0.05 + 0.10 + 0.20 = 0.35,$$

och

$$p_X(3) = \sum_{k=0}^{2} p_{X,Y}(3,k) = \sum_{k=0}^{2} p_{X,Y}(X = 3 \cap Y = k) = 0.10 + 0.35 + 0.1 = 0.55.$$

Därför, $E(X) = 1p_X(1) + 2p_X(2) + 3p_X(3) = 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.35 + 3 \cdot 0.55 = 2.45$

Svar: 2.45

Uppgift 5

Om $D(X) = 4$, så är $V(X) = 16$. På samma sätt, $D(Y) = 2$ ger $V(Y) = 4$.
Dessutom, har vi: $C(2X, Y) = C(X, Y) + C(X, Y) = -12$, som ger $C(X, Y) = -12/2 = -6$.
Därmed, $V(X - 3Y - 12) = V(X - 3Y) = V(X) + 9V(Y) + 2 \cdot (-3)C(X, Y) = 16 + 9 \cdot 4 + 36 = 88$

Svar: 88