Föreläsning 6

Repetera

$$E(X) = \sum x \cdot p_X(x)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx \qquad = \mu$$

$$E[g(X)] = \sum g(x)\, p_X(x)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)$$

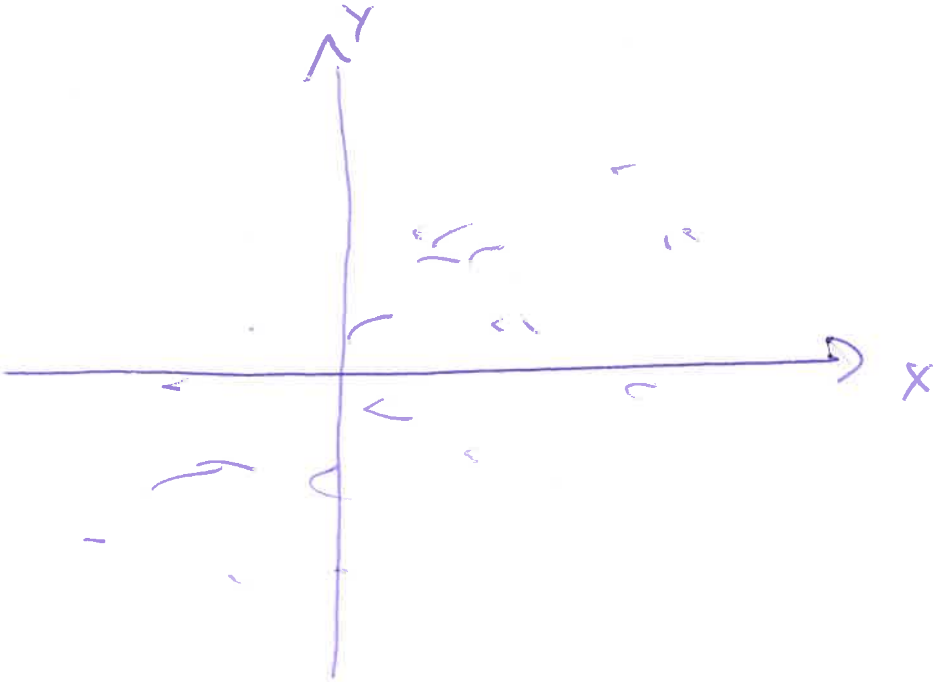
$$V(X) = E[(X - E(X))]^2 = E(X^2) - E^2(X)$$

$$D(X) = \sqrt{(X)} \qquad D(X) > 0$$

$$E(X) = \mu \qquad D(X) = \sigma$$

$$E[g(X, Y)] = \sum g(x, y) \cdot p_{X,Y}(x, y)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\, f_{X,Y}(x, y)$$

5.4



Sambandet mellan X och Y kan beskrivas med kovariansen och korrelationskoefficienten

1 <u>Def</u> $C[X,Y] = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] =$

3 $= E[X \cdot Y] - \mu_Y E(X) - \mu_X E(Y) + \mu_X \mu_Y$

$= E[X \cdot Y] - \mu_X \mu_Y = E[X \cdot Y] - E(X)E(Y)$

2 $C[X,Y] = \sum_{\text{alla } x} \sum_{\text{alla } y} (x-\mu_x)(y-\mu_y)\, p_{X,Y}(x,y)$

$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)(y-\mu_y)\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$

4 Specialfall $C[X,X] = E[X^2] - E^2(X) = V(X)$

<u>Def</u> korrelationskoefficienten $\rho(X,Y) = \dfrac{C[X,Y]}{D(X)\cdot D(Y)}$

$$-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$$

Spec $\rho(X,X) = \dfrac{C[X,X]}{D(X)\cdot D(X)} = \dfrac{V(X)}{V(X)} = 1$

om $\rho(X,Y) = 0$

säges X och Y vara okorrelerade

om X och Y är ober

gäller att $E(X\cdot Y) = \sum\limits_{\text{alla } x}\sum\limits_{\text{alla } y} x\cdot y\cdot p_{X,Y}(x,y) =$

$= \text{Ober} = \sum\limits_{\text{alla } x}\sum\limits_{\text{alla } y} x\cdot y\cdot p_X(x)\cdot p_Y(y) =$

$= \sum x\cdot p_X(x)\cdot\sum y\cdot p_Y(y) = E(X)\cdot E(Y)$

~~Detta leder till att~~ om X och Y är ober

$\Rightarrow C[X,Y] = E[X\cdot Y] - E(X)\cdot E(Y) = 0$

D.v.s om X och Y är ober $\Rightarrow$ X och Y okorrelerade

Omvändningen behöver dock ei vara sann

ex lät $X \in U[-1,1]$

lät $Y = X^2$

$$C[X,Y] = E[X \cdot Y] - E(X) \cdot E(Y)$$

$$E[X \cdot Y] = E[X^3] = \int_{-1}^{1} x^3 \cdot \frac{1}{2} \, dx = 0$$

$$E(X) = 0 \Rightarrow C[X,Y] = 0$$

Här är X och Y i högsta grad beroende
och okorrelerade

Räkna 5.18

Räkneregler för kovarianser

$$C[X, Y+b] = E[X \cdot (Y+b)] - E(X)\,E(Y+b) =$$

$$= E(X \cdot Y) + E(bX) - E(X)\,E(Y) - E(X)E(b)$$

$$= E(X \cdot Y) - E(X)E(Y)$$

$$C[X, Y+b] = C[X,Y]$$

konstanter inverkar ej

allm $C[aX+bY, cZ+dW] = ac\,C[X,Y] + ad\,C[X,W]$

$$+ bc\,C[Y,Z] + bd\,C[Y,W]$$

<u>Spec</u> $V[\bar{X}+\bar{Y}] = C[\bar{X}+\bar{Y}, \bar{X}+\bar{Y}) =$

$= C[X,X] + C(Y,Y] + 2C[X,Y]$

$$\boxed{\text{D.v.s} \quad V(\bar{X}+\bar{Y}) = V(\bar{X}) + V(\bar{Y}) + 2C[\bar{X},\bar{Y}]}$$

$\bar{X}$ och $\bar{Y}$ ober $\Rightarrow E(\bar{X}\cdot\bar{Y}) = E(\bar{X})\cdot E(\bar{Y})$

$\Rightarrow C[\bar{X},\bar{Y}] = 0$

$\Rightarrow V(\bar{X}+\bar{Y}) = V(\bar{X}) + V(\bar{Y})$

$E(\bar{X}_n) = E[\frac{1}{n}(X_1 + \dots X_n)] = \frac{1}{n} n \cdot E(X_i) = \mu$

$V(\bar{X}_n) = V[\frac{1}{n}(X_1 + \dots X_n)] = \frac{1}{n^2} n \cdot V(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$

$D(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

D.v.s det är mindre spridning mellan medelvärden än mellan observationer

Stora talens lag För alla $\varepsilon > 0$ gäller att

$P(\mu - \varepsilon < \bar{X}_n < \mu + \varepsilon) \to 1$ då $n \to \infty$

Bevisas genom Markovs olikhet

$P(Y \geq a) \leq \frac{E(Y)}{a}$ $(Y > 0 \quad a > 0)$