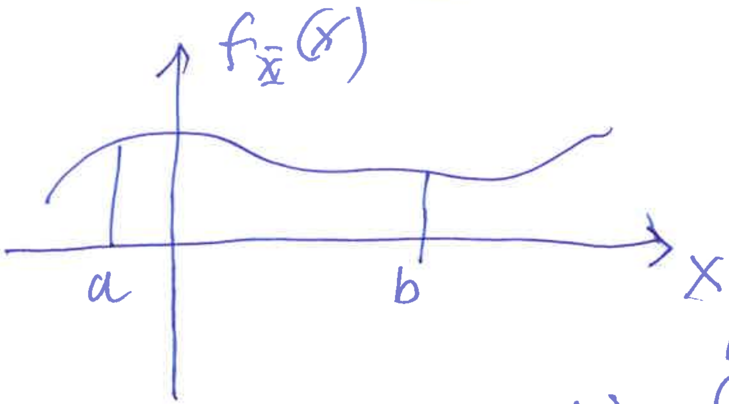
Förelasning 5

Kontinuerlig fordeling 1 dim



$$P(a \le X < b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

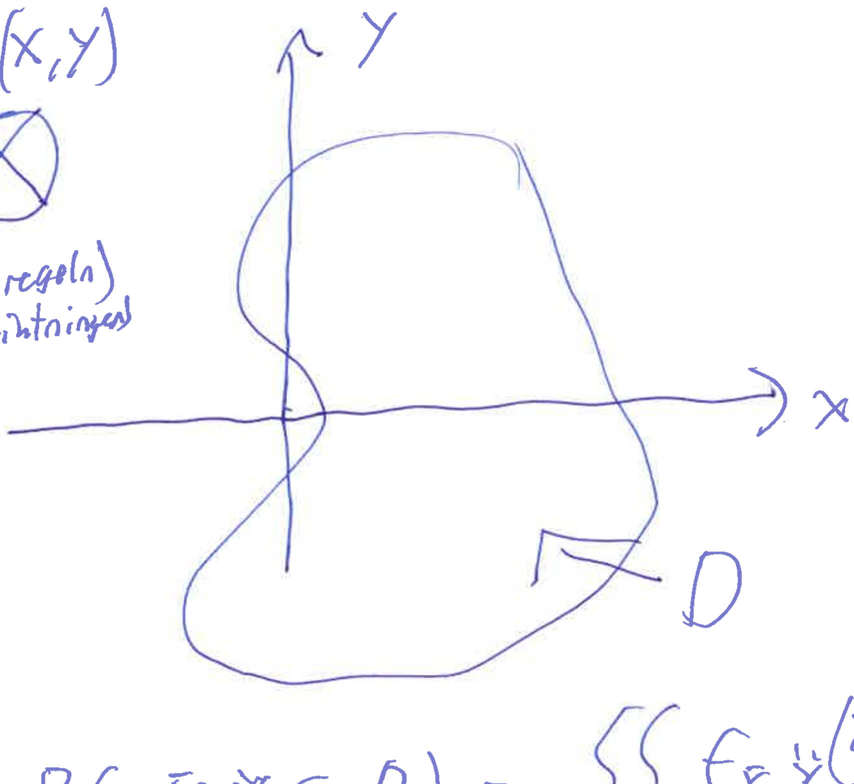
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

Kontinuerlig fordeling 2 dim

$f_{X,Y}(x,y)$

$\otimes$

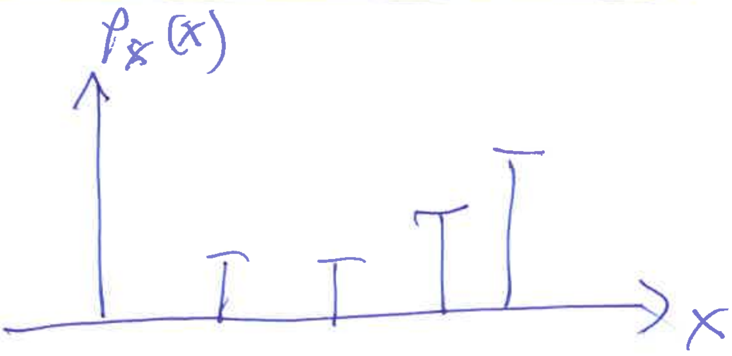
(Skruregeln)
(z-retningen)



$$P(X,Y \in D) = \iint_D f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

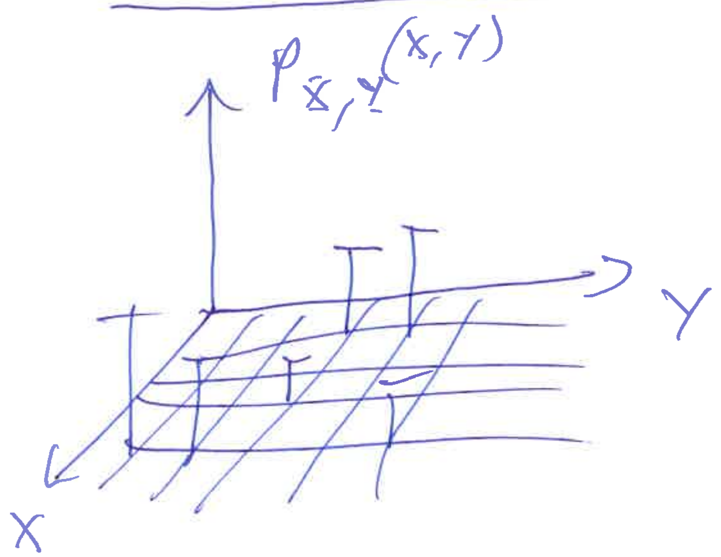
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$$

Diskret fördeln 1 dim



$$\sum_{\substack{\text{alla} \\ \text{utfall } x}} p_X(x) = 1$$

Diskret fördelning 2 dim



$$\sum_{\substack{\text{alla} \\ \text{utfall} \\ x,y}} p_{X,Y}(x,y) = 1$$

$$p_X(x) = \sum_{\substack{\text{alla} \\ y}} p_{X,Y}(x,y) \qquad p_Y(y) = \sum_{\substack{\text{alla} \\ x}} p_{X,Y}(x,y)$$

$$p_{X,Y}(x,y) = P(X = x \wedge Y = y) = \text{om ober} = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \overset{\text{om}}{\text{ober}} = f_X(x)\,f_Y(y)$$

Fler dim stokvar

2dim $\quad F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x \cap Y \le y)$

Diskreta fallet $\qquad$ Kont fallet

som jag brukar

$$Z = \max(X, Y)$$

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(\cancel{Z \le \text{största värdet av } x \text{ och } y})$$

$$= P(\cancel{\text{största värdet}}\ \max(X,Y) \le z) =$$

$$= P(X \le z \cap Y \le z) = \text{ober} = F_X(z) \cdot F_Y(z)$$

$$Z = \min(X, Y)$$

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(\text{minsta värdet} \le z) =$$

$$= P(\text{minst ett av värdena} < z) = 1 - P(\text{alla} > z) =$$

$$= 1 - P(X > z \cap Y > z) = 1 - P(X > z) \cdot P(Y > z) =$$

$$= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$$

Z -

Summa $\bar{X}+\bar{Y}=Z$

$$P_{Z}(z) = P(\bar{X}+\bar{Y}=z) = \sum_{x+y=z} P_{\bar{X},\bar{Y}}(x,y) =$$

$$= \sum_{x=0}^{z} P_{\bar{X},\bar{Y}}(x, z-x)$$

ex Po-fördeln $\bar{X} \in Po(\mu_1)$ $\bar{Y} \in Po(\mu_2)$

$$P_Z(n) = P(\bar{X}+\bar{Y}=n) = P(\bar{X}=0 \cap \bar{Y}=n) +$$

$$+ P(\bar{X}=1 \cap \bar{Y}=n-1) + \dots P(\bar{X}=n \cap \bar{Y}=0)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} P_{\bar{X}}(j) P_{\bar{Y}}(n-j) = \text{ober} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{\mu_1^{j}}{j!} e^{-\mu_1} \cdot \frac{\mu_2^{n-j}}{(n-j)!} e^{-\mu_2} =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} e^{-(\mu_1+\mu_2)} \cdot \mu_1^{j} \mu_2^{n-j}$$

$$= \underline{\frac{1}{n!} e^{-(\mu_1+\mu_2)} (\mu_1+\mu_2)^{n}} \in Po(\mu_1+\mu_2)$$

Kont

$$F_Z(z) = F_{\bar{X}+\bar{Y}}(z) = P(\bar{X}+\bar{Y} \leq z) = \iint_{x+y<z} f_{\bar{X},\bar{Y}}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_{\bar{X}}(x) f_{\bar{Y}}(y)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\bar{X}}(x) F_{\bar{Y}}(z-x)\,dx$$

Väntevärdet av X kallas $E(X)$ och är vad X blir i genomsnitt om man gör oändligt många försök –

E X 5.1 sid 107–108

Vi kastar tärning

~~1 ger 1 kr~~ ~~2 ger~~

1 ger 1 kr
2,3 ger 2 kr
4,5,6 ger 4 kr

Anta att vi kastar 6000 ggr

då borde vi få $1 \cdot 1000 + 2 \cdot 2000 + 4 \cdot 3000 = 17000$

$\Rightarrow$ i genomsnitt $\frac{17000}{6000} = \frac{17}{6}$ kr

Antag nu att X = antalet kr vi vinner i ett kast

$$E(X) = \frac{1 \cdot 1000 + 2 \cdot 2000 + 4 \cdot 3000}{6000} = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{2}{6} + 4 \cdot \frac{3}{6}$$

$$= 1 \cdot p_X(1) + 2 \cdot p_X(2) + 4 \cdot p_X(4)$$

$$= \sum x \cdot p_X(x)$$

~~Först kollar vi~~ vilka utfall det kan bli

Först kollar vi vilka punkter utfallen kan hamna i t.ex 1, 2, 4 sen viktar vi

se det som en tyngdpunkt.

se sid 108

$$E(X) = \sum x \cdot p_X(x) \quad \text{diskret}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx \quad \text{kont}$$

Föreläsning 4 väntevärden varianser

Väntevärdet av $g(X)$ är vad $g(X)$ blir i genomsnitt om vi gör oändligt många försök

Se sid 110 $E[g(X)] = \sum_j g(x) \cdot p_X(x)$
$= \int_{-\infty} g(x) f_X(x)$

ex Vad blir X^2 i genomsnitt i exemplet

Vi kastar tärningen
1 ger 1 kr
2,3 ger 2 kr
3,4,5 ger 3 kr

$\Rightarrow E(X^2) = \sum x^2 \cdot p_X(x) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 4^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{19}{2}$

OBS $E(X^2) \neq E^2(X)$ i allmänhet

Ex Anta att $p_X(-1) = \frac{1}{2}$ $p_X(1) = \frac{1}{2}$

$E(X) = 0$ $E(X^2) = 1$

Variansen för X är $V(X) = E[(X-\mu)^2]$

där $\mu = E(X)$

$E[(X-\mu)^2] = E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$
$= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - E^2(X)$

se sid 117

$D(X) = \sqrt{V(X)}$ $R(X) = \frac{D(X)}{E(X)}$

exemplet ovan $\Rightarrow$ $V(X) = E(X^2) - E^2(X) =$

$$= \frac{19}{2} - \left(\frac{17}{6}\right)^2 = \qquad =$$

$$= \frac{18 \cdot 19}{36} - \frac{17 \cdot 17}{36} = \frac{342 - [100 + 49 + 140]}{36} =$$

$$= \frac{342 - 289}{36} = \frac{53}{36}$$

Ex Likformig fördelning

$$\begin{cases} f_X(x) = \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b =$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$ intuitivt riktigt $\boxed{\text{se sid 109}}$

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b \frac{1}{b-a} = \frac{b^3 - a^3}{b-a} \cdot \frac{1}{3}$$

$$V(X) = \frac{b^3 - a^3}{b-a} \cdot \frac{1}{3} - \left[\frac{a+b}{2}\right]^2 = \frac{b^3 - a^3}{b-a} \cdot \frac{1}{3} - \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4}$$

$$= \frac{4b^3 - 4a^3}{(b-a)} \cdot \frac{1}{12} - \frac{3(b-a)[a^2 + b^2 + 2ab]}{12(b-a)} = \ldots$$

$$= \frac{\cancel{4b^3} - 4a^3 - 3ba^2 - \cancel{3b^3} - 6ab^2 + 3a^3 + 3ab^2 + 6a^2b}{12\,(b-a)} = \frac{b^3 - 3ab^2 + 3a^2b - a^3}{12\,(b-a)} = \frac{(b-a)^3}{12(b-a)} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Föreläsning 4 sid 4

Ex exp-fördelningen $\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx =$

$$= \int_0^{\infty} \underset{f}{x} \cdot \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{g'} dx = \Big[\underset{fg}{x \cdot -e^{-\lambda x}}\Big]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \underset{f'g}{(1) - e^{-\lambda x}}\, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$\boxed{\text{se sid 109}}$

intuitivt riktigt

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \text{part-int } 2gg = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda}$$

ex Bin-fördeln om vi gör n försök och vi varje gång har slh p att lyckas är X = antalet lyckade försök $\in Bin(n, p)$

eff försök $E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$

$\Rightarrow E(X) = np$

$E(X^2) = 1^2 \cdot p + 0^2(1-p) = p$

$p - p^2 = p(1-p) \quad \Rightarrow V(X) = np(1-p)$

sid 5

ex ffg-fördeln $E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot p(1-p)^{x-1} =$

$$= p \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} = p \sum_{x=1}^{\infty} \frac{d}{dp}(1-p)^{x} \cdot (-1)$$

$$= -p \frac{d}{dp} \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^{x} = -p \frac{d}{dp} \frac{1-p}{1-(1-p)} =$$

$$= -p \frac{d}{dp} \left[\frac{1}{p} - 1\right] = -p \cdot \left(-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{p}$$ $\boxed{\text{sid 109}}$

---

ex Po-fördeln $E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} \cancel{x} \frac{\mu^{x}}{\cancel{x}!} e^{-\mu}$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mu^{x}}{(x-1)!} e^{-\mu} = \mu \cdot \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mu^{x-1}}{(x-1)!} e^{-\mu}$$

$$= \mu e^{-\mu} \cdot \left[1 + \mu + \frac{\mu^2}{2!} + \frac{\mu^3}{3!} + \dots\right] = \mu e^{-\mu} \cdot e^{\mu} = \mu$$

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot (x-1) \frac{\mu^{x}}{x!} e^{-\mu} = \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\mu^{x}}{(x-2)!} e^{-\mu} =$$

$$= \mu^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\mu^{x-2}}{(x-2)!} e^{-\mu} = \mu^2 = E(X^2) - E(X).$$

$\Rightarrow E(X^2) = \mu + \mu^2 \quad \Rightarrow V(X) = \mu + \mu^2 - \mu^2 = \mu$

$$E[x(x+1)] = \sum_{x=1}^{\infty} x(x+1)\,p(1-p)^{x-1} =$$

$$= p \sum_{x=1}^{\infty} \frac{d^2}{dp^2} [1-p]^{x+1} =$$

$$= p \frac{d^2}{dp^2} \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^{x+1} = \cancel{p \frac{d^2}{dp^2} \sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^{x}}$$

$$= p \cdot \frac{d^2}{dp^2} \left[(1-p)^2 + (1-p)^3 \ldots\right] =$$

$$p \cdot \frac{d}{dp^2} \left[(1-p)^2 \cdot \frac{1}{p}\right] = p \cdot \frac{d}{dp^2}\left[\frac{1}{p} - 2 + p\right]$$

$$= p \frac{d}{dp}\left[-\frac{1}{p^2} + 1\right] = p \cdot \frac{2}{p^3} = \frac{2}{p^2}$$

$$E(X^2) + E(X) = \frac{2}{p^2} \Rightarrow E(X^2) = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$$

$$V(X) = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}$$

sid 7

Räkneregler sid 113 $E[aX+bY+c] = aE(X)+bE(Y)+c$

$$V[aX] = E[a^2X^2] - E^2[aX] =$$

$$= a^2 E[X^2] - a^2 E^2(X) = a^2 V(X)$$

sid 118 $V[aX+b] = V[aX] = a^2 V(X)$

om ober gäller att $V[X+Y] = V(X) + V(Y)$ sid 125

OBS! $V(X-Y) = V(X) + V(-Y) = V(X) + (-1)^2 V(Y)$

$E(\bar{X}_n) = \mu \quad V(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$

Korrelation = samband

Def korrelations koefficient $\rho(X,Y) = \dfrac{C[X,Y]}{D(X)\cdot D(Y)}$ sid 123

kovarians = $C(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)$ sid 122

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

$\rho = 0 \iff X$ och Y okorrelerade

Ober $\Rightarrow$ okorr eftersom $E(X\cdot Y) = E(X)\cdot E(Y)$ om ober

omvändningen behöver ej gälla

ex 5.13 sid 123 $U[-1,1] \quad C[X, X^2]$

$$E[X^3] = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$E(X) = 0 \quad \Rightarrow C[X,Y] = 0 \Rightarrow$ okorr

men X och X^2 är beroende