Föreläsning 12

1

Anta nu att vi vill bilda konf-int
där θ^* ej är N-fördelat men approximativt N-fördelat

Hittills har konfintervallen varit:

$$I_\theta = \theta^*_{obs} \pm D(\theta^*) \lambda_{\frac{\alpha}{2}}$$

eller $I_\theta = \theta^*_{obs} \pm d(\theta^*) \cdot t_{\frac{\alpha}{2}}(f)$

Anta t.ex att vi vill bilda
konf-int för $\mu_X - \mu_Y$ när

$E(X_i) = \mu_X \ldots$ $X_i \in N(\mu_X, \sigma_X)$ och $Y_j \in N(\mu_Y, \sigma_Y)$

och $\sigma_X \neq \sigma_Y$ och σ_X och σ_Y är okänd

Om stickproven är tillräckligt stora (C.G.S.)

kan vi då bilda ett ~~approximat~~ konf-int
med approximativ konfidensgrad $1-\alpha$ för $\mu_X - \mu_Y$
även om observationerna inte kommer från en N-fördelning

$$= I_{\mu_X - \mu_Y} = \bar{x} - \bar{y} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{s_X^2}{n_X} + \frac{s_Y^2}{n_Y}}}_{d(\mu_X^* - \mu_Y^*)} \cdot \lambda_{\frac{\alpha}{2}}$$

Vid alla tidigare konf-int kan det approximativa
konf-intervallet användas om n tillräckligt
stort även om vi ej har N-fördelning från början
C.G.S

② ⑩

Anta $X \in Bin(n, p)$

Vi skattar p med $\frac{X}{n}$

d.v.s $p^* = \frac{X}{n}$ $\quad p^*_{obs} = \frac{x}{n}$

om $n p^*_{obs}(1-p^*_{obs}) \geq 10$ kan vi bilda

konf-int med approximativ konf-grad enl §12.3

$$I_\theta = \theta^*_{obs} \pm d(\theta^*) \cdot \lambda_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow I_p = p^*_{obs} \pm \sqrt{\frac{p^*_{obs}(1-p^*_{obs})}{n}} \lambda_{\frac{\alpha}{2}}$$

Konf-int för skillnad mellan andelar

$$I_{p_x - p_y} = p^*_{x\,obs} - p^*_{y\,obs} \pm \sqrt{\frac{p^*_{obs}(1-p^*_{obs})}{n_x} + \frac{p^*_{obs}(1-p^*_{obs})}{n_y}} \lambda_{\frac{\alpha}{2}}$$

Anta $X \in Po(\mu)$ och $\mu > 15$

$$\Rightarrow I_\mu = \mu^*_{obs} \pm \sqrt{\frac{\bar{x}}{n}} \cdot \lambda_{\frac{\alpha}{2}}$$

$\uparrow$
$\bar{x}$

3

Konf-int för σ När X_i:na $\in N(\mu, \sigma)$ μ okänt, σ okänt

Om vi har att Z_i:na är ober och $N(0,1)$ gäller att

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \in \chi^2(n)$$

se F.S §4

~~Fitta nu på~~

Vidare gäller att

$$\sum\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum(X_i-\bar{X})^2 \in \chi^2(n-1)$$

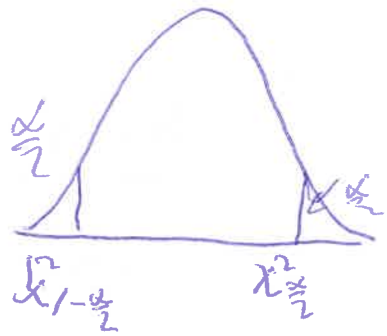
se §10

§K.2b

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum(X_i-\bar{X})^2 = \frac{(n-1)}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{n-1}\sum(X_i-\bar{X})^2 = \frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2$$

d.v.s

$$\frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2 \in \chi^2(n-1)$$



$$P\left(\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2}$$

$$P\left(\sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2(\frac{\alpha}{2})}\right) = \frac{\alpha}{2}$$

$$P\left(\sigma < \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right) = \frac{\alpha}{2}$$

4

$$P\left(\sigma < \sqrt{\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right) = 1-\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow I_\sigma = \left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},\ \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)$$

$$I_{\sigma^2} = \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

jfr § 12.4

$$I_\theta = \left(\theta^*_{obs}\sqrt{\frac{f}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(f)}},\ \theta^*_{obs}\sqrt{\frac{f}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(f)}}\right)$$

jfr § 12.4 $\quad f\cdot\left(\frac{\theta^*}{\theta}\right)^2 \in \chi^2(f)$

med § 11.1b $\quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \in \chi^2(n-1)$

$\Rightarrow \quad f = n-1 \quad \theta = \sigma$ och $\theta^*_{obs} = s$

ger intervallet för I_σ ovan

Felfortplantning ~~[illegible]~~ sid 1

Anta att vi fått skattningen $\lambda^*_{obs} = \frac{1}{\bar{X}}$ där $X_i \in exp(\lambda)$

Vi vill ha $E(\lambda^*)$ och medelfelet $D(\lambda^*)_{obs}$

(Vi vet att $E(X_i) = \frac{1}{\lambda}$ och $D(X_i) = \frac{1}{\lambda}$)

men ~~ska~~ λ^*_{obs} beror ej linjärt av X_i:na

så vi kan inte använda oss av att

$$E[a\bar{X}+b] = aE(\bar{X}) + b$$

och $V(a\bar{X}+b) = a^2 V(\bar{X})$

~~[illegible]~~ Taylorutveckla kring θ^* om (θ^* ligger nära θ)

$\boxed{\text{Härledning av §9.4a i F.S}}$

$$\psi^* = g(\theta^*) = g(\theta) + (\theta^* - \theta)g'(\theta) + \underbrace{\frac{(\theta^* - \theta)^2 g''(\theta)}{2!} + \ldots}_{\text{resttern}}$$

$$E[g(\theta^*)] \approx E[g(\theta)] + E[(\underset{\uparrow \text{konst}}{\theta^* - \theta})\, \underset{\uparrow \text{konst}}{g'(\theta)}] =$$

$$= \left[\begin{matrix}\text{VVR} \\ E(\theta^*) = \theta\end{matrix}\right] = E[\underbrace{g[E(\theta^*)]}_{\text{konst}}] + g'(\theta) \cdot \underbrace{[E[\theta^*] - \theta]}_{=0 \text{ ty VVR}} =$$

$$= g[E(\theta^*)]$$

D.v.s $E[g(\theta^*)] \approx g[E(\theta^*)] = g(\theta) \approx \underline{g(\theta^*_{obs})}$

$$V[g(\theta^*)] = V[\underset{\uparrow \text{konst}}{g(\theta)} + (\theta^* - \theta)\underset{\text{konst}}{g'(\theta)}] =$$

$$= [g'(\theta)]^2 V[\theta^* - \underset{\uparrow \text{konst}}{\theta}] = g'^2(\theta) V(\theta^*)$$

$$\Rightarrow D[g(\theta^*)] \approx \underline{|g'(\theta)|\, D(\theta^*)}$$

Övnuppg. 11.13b)

Felfortplantning sid 2

Här $\theta^* = \bar{X}$

$$E[\lambda^*] \approx E\left(\frac{1}{\bar{X}}\right) \approx \frac{1}{E(\bar{X})} = \frac{1}{\mu} = \lambda \quad \left(\lambda^* = g(\theta^*) = \frac{1}{\bar{X}}\right)$$

$$V[\lambda^*] = |g'(\bar{X})|^2 \cdot V(\bar{X}) = \left(-\frac{1}{\bar{X}^2}\right)^2 \cdot \frac{\sigma^2}{n} =$$

$$= \left(-\frac{1}{\bar{X}^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\lambda^2 \cdot n}$$

$$D(\lambda^*) = \frac{1}{\bar{X}^2} \cdot \frac{1}{\lambda \cdot \sqrt{n}}$$

$$d(\lambda^*) = D^*_{obs}(\lambda^*) = \frac{1}{\bar{X}^2} \cdot \frac{\bar{X}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\bar{X} \cdot \sqrt{n}}$$

fel fortplantning sid 0

$$g(\theta^*) = \text{Taylor} = g(\theta) + (\theta^* - \theta)\, g'(\theta) + \underbrace{\frac{(\theta^* - \theta)^2}{2!}\, g''(\theta) \ldots}_{\text{rest term} \approx 0}$$

$$E[g(\theta^*)] \approx E[g(\theta)] + E[(\theta^* - \theta)\cdot g'(\theta)] =$$

$$= (\text{vvr}) = E[g(E(\theta^*))] + g'(\theta)[E(\theta^*) - E(\theta)] = \text{ovr}$$

$$= g[E(\theta^*)] + g'(\theta)[\theta - \theta]$$

$$= g(E(\theta^*)) = g(\theta) \approx g(\theta^*_{obs})$$

$$V[g(\theta^*)] = V(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{konst}}}{g(\theta)}) + V([\theta^* - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konst}}}{\theta}]\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konst}}}{g'(\theta)}) = g'^2(\theta)\, V(\theta^*)$$

d.v.s $D(g(\theta^*)) \approx |g'(\theta^*_{obs})|\, D(\theta^*)$