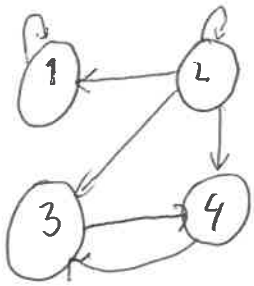
Föreläsning 3

icke irreducibelt ex (Samma som senare men här utförligare) (8) A

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

ändlig
ej irreducibel
och aperiodisk



1 är absorberande tillstånd

2 är genomgångstillstånd

(3,4) sluten irreducibel delmängd

vid start i (1) fås $\lim_{n\to\infty} \underline{P} = (1, 0, 0, 0)$

vid start i (2) $a_{21} = P_{21} + P_{22}\, a_{21} =$

$$a_{21} = 0.2 + 0.5\, a_{21}$$

$$\Rightarrow 0.5\, a_{21} = 0.2 \Leftrightarrow a_{21} = 0.4$$

$$\Rightarrow a_{2\{3,4\}} = 0.6$$

$$(\pi_3\ \pi_4)\begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_3 \\ \pi_4 \end{pmatrix} \Rightarrow (\pi_3\ \pi_4) = \left(\tfrac{5}{12}\ \ \tfrac{7}{12}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \underline{P} = \left(0.4,\ 0,\ \tfrac{5}{12}\cdot\tfrac{6}{10},\ \tfrac{7}{12}\cdot\tfrac{6}{10}\right) = \left(0.4,\ 0,\ 0.25,\ \tfrac{7}{20}\right)$$

vid start i (3,4) $\lim_{n\to\infty} \underline{P} = \left(0, 0, \tfrac{5}{12}, \tfrac{7}{12}\right)$

icke irreducibelt exempel

(9)

$$(\pi_1\ \pi_2\ \pi_3\ \pi_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1 + 0.2\,\pi_2 = \pi_1$$

$$0.5\,\pi_2 = \pi_2$$

$$0.1\,\pi_2 + 0.3\pi_3 + 0.5\,\pi_4 = \pi_3$$

$$0.2\,\pi_2 + 0.7\pi_3 + 0.5\,\pi_4 = \pi_4$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$$

$$\cancel{\pi_2 = 0}$$

$$\cancel{\pi_1 = \pi_1 \qquad \pi_2 = \frac{5}{12} \qquad \pi_3 = \frac{7}{12}}$$

$$0.7\,\pi_3 = 0.5\,\pi_4$$

$$\pi_1 + \frac{5}{7}\pi_4 + \pi_4 = 1$$

$$\pi_1 = 1 - \frac{12}{7}\pi_4$$

$$\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3$$

$$(\pi_1\ \pi_2\ \pi_3) = (1, 0, 0) + \left(-\frac{12}{7}, 0, \frac{5}{7}\right)\pi_4$$

$$(\pi_1\ \pi_2\ \pi_3\ \pi_4) = (1, 0, 0, 0) + \left(-\frac{12}{7}, 0, \frac{5}{7}, 1\right)\pi_4$$

$$1 - \frac{12}{7}\pi_4 = 0 \qquad\qquad 0 \le \pi_4 \le \frac{7}{12}$$

OBS $\underline{\pi} P = \underline{\pi}$ löses på formen med $\underline{\pi}(P - I) = \underline{0}$

p.g.a aperiodiciteten och att $\{3\ 4\}$ är irreducibel så finns en gränsfördelning för varje startfördelning (dock ej entydig ty hela kedjan är ej irreducibel)

om $\underline{p}^{(0)} = (1, 0, 0, 0) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \underline{p} = (1, 0, 0, 0)$

om $\underline{p}^{(0)} = (0, 1, 0, 0) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \left(0.4, 0, \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{12}, \frac{6}{10} \cdot \frac{7}{12}\right)$

om $\underline{p}^{(0)} = (0, 0, p_3, p_4) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \underline{p} = \left(0, 0, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}\right)$

generellt fås följande stationära ~~fördelningar~~ fördelningar som också är gränsfördelningar

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = \left(1 - \frac{12}{7}\pi_4, 0, \frac{5}{7}\pi_4, \pi_4\right)$$

$\pi_4 = 0$ motsvarar startfördelning $(1, 0, 0, 0)$

$\underline{\text{Anta}}$ $\underline{p}^{(0)} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \underline{p}^{(n)} =$$

$$= p_1 \cdot (1, 0, 0, 0) + p_2\left(0.4, 0, \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{12}, \frac{6}{10} \cdot \frac{7}{12}\right) +$$

$$+ (p_3 + p_4)\left(0, 0, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}\right)$$

(1)

Exempel på hur man beräknar sannolikheten att absorberas i respektive sluten irreducibel delklass. Är dessa sedan aperiodiska konvergerar fördelningen mot den stationära i resp delklass

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

kedjan är ändlig => minst en lösning
ej irreducibel => oändligt många lösningar
aperiodisk Givet en viss startfördelning blir resp stationära fördelning gränsfördelning ty delklassen {3,4} aperiodisk och irreducibel ändlig

{1} är ~~aperiodisk~~ absorberande

{2} är genomgångstillstånd

{3,4} är sluten irreducibel delmängd

$$a_{21} = P_{21} + P_{22}\, a_{21} \Rightarrow a_{21} = 0.4$$

$$\Rightarrow a_{2\{3,4\}} = 0.6 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$\underline{\pi} P = \underline{\pi}$ $\qquad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$

$$\Rightarrow \quad \underline{\pi} = \left(1 - \frac{12}{7}\pi_4,\ 0,\ \frac{5}{7}\pi_4,\ \pi_4\right)$$

$0 \le \pi_4 \le \frac{7}{12}$

lokal fördelning för $\{3,4\}$

fås från $\underline{\pi}\begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} = \underline{\pi}$

$\pi_3 + \pi_4 = 1$

$$\Rightarrow \quad \underline{\pi} = \left(\frac{5}{12}\ \ \frac{7}{12}\right)$$

Givet startvektor $\underline{p}^{(0)} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \underline{p}^{(n)} = p_1 \cdot (1,0,0,0) + p_2\left(0.4, 0, 0.6\tfrac{5}{12}, 0.6\cdot\tfrac{7}{12}\right)$$

$$+ (p_3 + p_4)\left(0, 0, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}\right)$$

Om $\underline{\pi} = (\pi_1, \pi_2 \ldots \quad)$ är en stationär fördelning till en irreducibel Markovkedja gäller att $\pi_i = \frac{1}{E(T_i)}$ där T_i = tiden mellan 2 besök i $\{i\}$. $\frac{\pi_j}{\pi_i}$ = Förväntat antal besök i tillstånd j mellan 2 besök i tillstånd i

Exempel $E = \{ \text{uppehåll}, \text{regn}, \text{snö} \}$

$$P = \begin{pmatrix} 0.80 & 0.15 & 0.05 \\ 0.10 & 0.70 & 0.20 \\ 0.20 & 0.30 & 0.50 \end{pmatrix}$$

ändlig irreducibel aperiodisk

$$\Rightarrow \quad \underline{\pi} = (0.4, 0.4, 0.2)$$

$$E[\text{nederbördsdagar mellan 2 uppehåll}] = E(T_1) - 1 = \frac{1}{\pi_1} - 1 = 1.5$$

$$E[\text{snödagar mellan två uppehåll}] = \frac{\pi_3}{\pi_1} = 0.5$$

Exempel på oändlig matris   RB 15.4.43   5

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$(x_0 \; x_1 \; x_2 \; x_3 \; \;) P = x_0 \; x_1 \; x_2$$

$$x_0 q + x_1 q = x_0 \quad (1) \qquad \frac{x_0 - x_0 q}{q} = x_1$$

$$x_0 p + x_2 q = x_1 \quad (2)$$

$$x_1 p + x_3 q = x_2 \quad (3)$$

$$x_{i-1} p + x_{i+1} q = x_i \quad (4)$$

$$(1) \Rightarrow x_1 = \frac{1-q}{q} x_0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{p}{q} x_0 \quad (1)$$

$$x_2 = \frac{1}{q} x_1 - \frac{p}{q} x_0 \quad (2)$$

$$x_3 = \frac{1}{q} x_2 - \frac{p}{q} x_1 \quad (3)$$

$$\vdots$$

$$x_N = \frac{1}{q} x_{N-1} - \frac{p}{q} x_{N-2} \quad (3)$$

6

$$x_1 = \frac{1-q}{q} x_0 \Rightarrow x_1 = \frac{p}{q} x_0$$

$$x_2 = \frac{1}{q} x_1 - \frac{p}{q} x_0 = \frac{1}{q} \cdot \frac{p}{q} x_0 - \frac{p}{q} x_0$$

$$= \frac{p}{q} \cdot \left(\frac{1}{q} - 1\right) x_0 = \frac{p^2}{q^2} x_0$$

$$x_3 = \frac{1}{q}\left[\frac{p^2}{q^2} x_0\right] - \frac{p^2}{q^2} x_0 =$$

$$= \left[\frac{1}{q} - 1\right] \frac{p^2}{q^2} x_0 = \frac{p^3}{q^3} x_0$$

$$x_i = \left(\frac{p}{q}\right)^i x_0$$

$$\sum x_i = X_0\left[1 + \frac{p}{q} + \frac{p^2}{q^2} + \dots \frac{p^N}{q^N}\right) =$$

= konv om $\left|\frac{p}{q}\right| < 1$ enl kvotkriteriet

d.v.s om $\cancel{\frac{p}{q}}$ $p < \frac{1}{2}$

d.v.s det existerar en lösning 15.1.4.3

d.v.s vi har en stationär fördelning
och är den den enda oberoende av startfördelning enl

summan blir då $x_0 \cdot \left[1 \cdot \frac{1}{1-\frac{p}{q}}\right] = 1$ 7

$$x_0 = 1 - \frac{p}{q}$$

$$x_1 = \left(1 - \frac{p}{q}\right) \cdot \frac{p}{q}$$

$$x_2 = \left(1 - \frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

$$x_N = \left(1 - \frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^N$$

Kontinuerlig tid

(8)

Def Markovprocess i kontinuerlig tid

$$P(X(t_{n+1}) = i_{n+1} \mid X(t_n) = i_n, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \ldots X(t_0) = i_0) =$$

$$= P(X(t_{n+1}) = i_{n+1} \mid X(t_n) = i_n)$$

För en tidshomogen gäller att

$$P(X(t+s) = j \mid X(s) = i) = P(X(t) = j \mid X(0) = i) =$$

d.v.s övergångssannolikheterna beror endast av $= p_{ij}(t)$
tidsskillnaderna t d.v.s vi har .

$$P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j \in E} = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

$$\underline{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \ldots p_i(t) \ldots) \qquad p_i(t) = P(X(t) = i)$$

Chapman Kolmogorov blir nu (jfr diskreta fallet)

a) $p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in E} p_{ik}(s)\, p_{kj}(t)$

b) $P(s+t) = P(s)\, P(t)$

c) $\underline{p}(s+t) = \underline{p}(s) \cdot P(t)$

a

En Markovprocess kallas reguljär om den

1) Gör ändligt många hopp under ändligt tidsintervall
2) Ligger kvar en positiv tid i det tillstånd den är i

Om en process är tidshomogen och T är tiden till uthopp från det tillstånd vi befinner oss i fås $P(T > t+h \mid T>t) = P(T>h)$

d.v.s den saknar minne villkoret i en Markovegen

Då gäller att $T \in exp$-fördeln (se Bevis sida i boken) med något λ där λ = uthoppsintensiteten

Uthoppsintensiteten kallas q_i

$\lim_{h\to 0}$

$$p_{ii}(h) = \left[P(X(t+h)=i \mid X(t)=i) = P(X \quad \text{hoppa över} \right.$$

$$= P(T > t+h \mid T > t) = \text{tidshomogent}\big] = P(T>h) =$$

$$= \exp(\lambda) = e^{-\lambda h} = \text{taylorutveckla} = 1 - \lambda h + \frac{(-\lambda h)^2}{2!} + \ldots$$

$$= 1 - \lambda h + o(h)$$

$$P(T<h) = \lambda h = \sum_{j \neq i} p_{ij}(h)$$

eller $e^{-\lambda \cdot 0}$

$$p'_{ii}(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{p_{ii}(h) - p_{ii}(0)}{h} = \frac{1 - \lambda h - (1 - \lambda \cdot 0)}{h} = -\lambda$$

$$\sum p'_{ij}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h} = \frac{\lambda h - 0}{h} = \lambda$$

har vi hoppa till flera ställen delas $\lambda = q_i$ = t.ex q_1

= uthoppsintensiteten upp i q_2

$$= q_1 = q_{12} + q_{13} + q_{14} + \ldots \quad \text{och} \quad q_{11} = -q_1$$

$$\sum_{j: j\neq i} q_{ij} = -q_{ii}$$

f_i P_{ii} en intensitetsmatris

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_{12} & q_{13} & q_{14} & \cdots \\ q_{21} & -q_2 & q_{23} & \cdots & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & & \\ & & \ddots & & \end{pmatrix}$$

$$\Sigma$$

$q_{ii} = -q_i$ radsummor $=0$

~~Uthoppsmatrisen~~

<u>Def</u> $\tilde{p}_{ij}$ = sannolikheten att nästa hopp från i sker till j

$$\tilde{p}_{ii} = 0$$

$$\tilde{p}_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}$$