Föreläsning 2

Absorption

Ett tillstånd är absorberande om kedjan alltid förblir i tillståndet när den väl kommit dit.

i är ett absorberande tillstånd $\Leftrightarrow P_{ii} = 1$

Ett genomgångstillstånd är ett tillstånd i som leder till ett tillstånd från vilket man ej kan komma tillbaka till i (i ett eller flera steg)

En Markovkedja kallas A-kedja om varje tillstånd i antingen är absorberande eller ett genomgångstillstånd

$$E = A \cup G \quad \text{där} \quad A \cap G = \emptyset$$

ex

A och B spelar ett spel med tärning

tärningen visar	händelse
1, 2	kastaren vinner
3	omkast
4, 5	motståndaren får kasta
6	kastaren förlorar

$E = \{1, 2, 3, 4\} \Leftrightarrow \{$ A kastar, B kastar, A vinner, B vinner $\}$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\{1, 2\} = G$

$A = \{3, 4\}$

tillståndsgraf

a_{ij} = sannolikhet att absorberas i j när vi startar i i

$$a_{13} = P_{13} + P_{11} a_{13} + P_{12} a_{23} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} a_{13} + \frac{2}{6} a_{23}$$

$$a_{23} = P_{23} + P_{21} a_{13} + P_{22} a_{23} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} a_{13} + \frac{1}{6} a_{23}$$

②

$$\Rightarrow a_{13} = \frac{4}{7} \Rightarrow a_{14} = \frac{3}{7} \quad \text{ty } a_{13} + a_{14} = 1$$

$$a_{23} = \frac{3}{7} \Rightarrow a_{24} = \frac{4}{7} \quad \text{ty } a_{23} + a_{24} = 1$$

~~OBS $a_{13} + a_{23} = 1$~~

OBS $$\sum_j a_{ij} = 1$$

$$\sum_i a_{ij} \neq 1 \text{ i allmänhet}$$

<u>allm</u> $$a_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \in G} p_{ik} a_{kj} \quad \text{se F.S.}$$

Låt T_i vara tiden till absorption vid start i i ($i \in G$) och $E(T_i) = t_i$

$$t_1 = 1 + p_{11} t_1 + p_{12} t_2 = 1 + \frac{1}{6} t_1 + \frac{2}{6} t_2$$

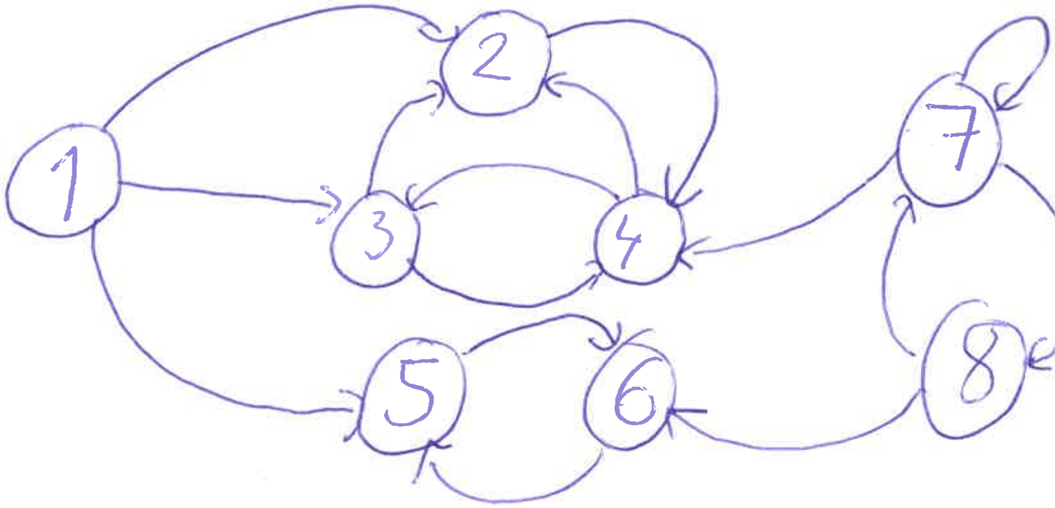
$$t_2 = 1 + p_{21} t_1 + p_{22} t_2 = 1 + \frac{2}{6} t_1 + \frac{1}{6} t_2$$

$$\Rightarrow t_1 = 2 \quad t_2 = 2$$ (ej samma i allmänhet)

~~i allm~~ <u>allm</u> $$t_i = 1 + \sum_{k \in G} p_{ik} t_k \quad \text{se F.S.}$$

- Om man kan ta sig från och tillbaka (i ett eller flera steg) mellan två tillstånd säger man att de kommunicerar
- Om vi kallar mängden av alla tillstånd som kommunicerar för E_i sägs E_i vara irreducibel
- E_i och E_j är antingen disjunkta eller sammanfallande
- En delmängd är sluten om man ej kan ta sig därifrån
- Om genomgångstillstånd $\in E_i \Rightarrow E_i$ ej sluten

ex



$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

(4)

$\{1\}$ Genomgångstillstånd

$\{2\ 3\ 4\}$ sluten irreducibel

$\{5\ 6\}$ sluten irreducibel

$\{7\ 8\}$ Genomgångstillstånd irreducibel

Def

En sannolikhetsfördelning $\underline{\pi}$ kallas för en stationär fördelning till en Markovkedja

om $\underline{\pi} = \underline{\pi} P$

Om man har som initialfördelning $\underline{p}^{(0)} = \underline{\pi} = (\pi_1, \pi_2 \dots \pi_k)$

$$\underline{p}^{(n)} = p^{(0)} P^n = \cancel{p^{(0)} P^{n-1}} = \pi P^n = \pi P P^{n-1} =$$

$$= \pi P^{n-1} = \dots \pi P = \pi$$

Def Om $\lim_{n \to \infty} \underline{p}^{(n)}$ existerar och inte beror på startfördelningen sägs Markovkedjan vara ergodisk

- En Markovkedja med ändligt tillståndsrum har minst en stationär fördelning
- En irreducibel Markovkedja har högst en stationär fördelning

=> irreducibel + ändlig => exakt en stationär fördelning (men kan bero på startfördelningen)

- En aperiodisk irreducibel ändlig Markovkedja är ergodisk.

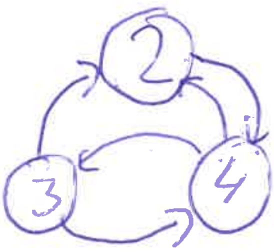
D.v.s. har är den enda stationära fördelningen ober av startfördelning.

Vad är aperiodisk?

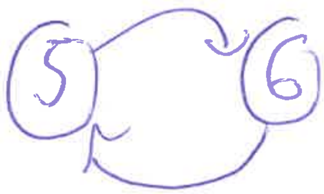
<u>Def</u> Låt D_i vara mängden av heltal n sådant att det är möjligt att från tillståndet i återvända till i i n tidssteg.

Låt d_i vara SGD till talen i D_i. Om SGD $= 1$ så är i ett aperiodiskt tillstånd.

<u>ex</u> Låt oss titta på våra kedjor



$D_2 = \{2, 3, 4, \dots\}$ $=$ SGD $= 1$ $d_i = 1$ aperiodisk



$D_5 = \{2, 4, 6, \dots\}$

$d_5 = 2$ ej aperiodisk

Vi låtsas att det är slutet av

$D_7 = \{1, 2, 3 \dots\}$ $d_i = 1$

aperiodisk

Det räcker att minst ett diagonalelement P_{ii} i en övergångsmatris är $\neq 0$ så är kedjan aperiodisk

6

Alla tillstånd i en sluten irreducibel tillståndsmängd har samma period

exempel

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

alla tillstånd kommunicerar $1 \to 3 \to 2 \to 1$

irreducibel

3 tillstånd ändlig

$p_{11} > 0$ aperiodisk

då är den ergodisk

$\Rightarrow$ En enda stationär lösning oberoende av starttiden

$\underline{\pi} P = \underline{\pi}$

$\sum \pi_i = 1$

$$(\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3) \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{matrix}$$

$\frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{10}\pi_2 = \pi_1$ ← Stryk valfri

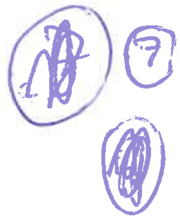
$0.8\pi_2 + 0.2\pi_3 = \pi_2$

$0.5\pi_1 + 0.1\pi_2 + 0.8\pi_3 = \pi_3$

$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ ← inte den

$\Rightarrow \underline{\pi} = \left(\frac{1}{11} \ \frac{5}{11} \ \frac{5}{11}\right) = \lim_{n \to \infty} \underline{P}^{(n)}$

Mot exempel



ändlig
irreducibel
ej aperiodisk

exakt en stationär lösning

$$(\pi_1\ \pi_2)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi_1\\ \pi_2\end{pmatrix}$$

$$= (\pi_2\ ,\ \pi_1) = (\pi_1\ ,\ \pi_2)$$

$\pi_1 + \pi_2 = 1$

$$\pi_1, \pi_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

men beroende av startfördelningen d.v.s. ej ergodisk.

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

(behåller ej samma fördelning)